

CHƯƠNG IV GIỚI HẠN

I. Giới hạn của dãy số

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực
<p>1. Giới hạn đặc biệt:</p> $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \quad (q < 1); \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} C = C$ <p>2. Định lý:</p> <p>a) Nếu $\lim u_n = a, \lim v_n = b$ thì</p> <ul style="list-style-type: none"> $\lim (u_n + v_n) = a + b$ $\lim (u_n - v_n) = a - b$ $\lim (u_n \cdot v_n) = a \cdot b$ $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} \quad (\text{nếu } b \neq 0)$ <p>b) Nếu $u_n \geq 0, \forall n$ và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$</p> <p>c) Nếu $u_n \leq v_n, \forall n$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$</p> <p>d) Nếu $\lim u_n = a$ thì $\lim u_n = a$</p> <p>3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn</p> $S = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \dots = \frac{u_1}{1 - q} \quad (q < 1)$	<p>1. Giới hạn đặc biệt:</p> $\lim \sqrt{n} = +\infty \quad \lim n^k = +\infty \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$ $\lim q^n = +\infty \quad (q > 1)$ <p>2. Định lý:</p> <p>a) Nếu $\lim u_n = +\infty$ thì $\lim \frac{1}{u_n} = 0$</p> <p>b) Nếu $\lim u_n = a, \lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$</p> <p>c) Nếu $\lim u_n = a \neq 0, \lim v_n = 0$ thì</p> $\lim \frac{u_n}{v_n} = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } a \cdot v_n > 0 \\ -\infty & \text{nếu } a \cdot v_n < 0 \end{cases}$ <p>d) Nếu $\lim u_n = +\infty, \lim v_n = a$ thì</p> $\lim (u_n \cdot v_n) = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } a > 0 \\ -\infty & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$ <p>* Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty$ thì phải tìm cách khử dạng vô định.</p>

Một số phương pháp tìm giới hạn của dãy số:

- Chia cả tử và mẫu cho lũy thừa cao nhất của n .

VD: a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{1}{2}$ b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} - 3n}{1 - 2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 3}{\frac{1}{n} - 2} = 1$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 4n + 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = +\infty$

- Nhân lượng liên hợp: Dùng các hằng đẳng thức

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b; \quad (\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a-b$$

$$\text{VD: } \lim(\sqrt{n^2-3n}-n)=\lim\frac{(\sqrt{n^2-3n}-n)(\sqrt{n^2-3n}+n)}{(\sqrt{n^2-3n}+n)}=\lim\frac{-3n}{\sqrt{n^2-3n}+n}=-\frac{3}{2}$$

• **Dùng định lý kẹp:** Nếu $|u_n| \leq v_n, \forall n$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$

$$\text{VD: } a) \text{ Tính } \lim \frac{\sin n}{n}. \quad \text{Vì } 0 \leq \left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \text{ và } \lim \frac{1}{n} = 0 \text{ nên } \lim \frac{\sin n}{n} = 0$$

$$b) \text{ Tính } \lim \frac{3\sin n - 4\cos n}{2n^2 + 1}. \quad \text{Vì } |3\sin n - 4\cos n| \leq \sqrt{(3^2 + 4^2)(\sin^2 n + \cos^2 n)} = 5$$

$$\text{nên } 0 \leq \left| \frac{3\sin n - 4\cos n}{2n^2 + 1} \right| \leq \frac{5}{2n^2 + 1}.$$

$$\text{Mà } \lim \frac{5}{2n^2 + 1} = 0 \text{ nên } \lim \frac{3\sin n - 4\cos n}{2n^2 + 1} = 0$$

Khi tính các giới hạn dạng phân thức, ta chú ý một số trường hợp sau đây:

- Nếu bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó bằng 0.
- Nếu bậc của tử bằng bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó bằng tỉ số các hệ số của lũy thừa cao nhất của tử và của mẫu.
- Nếu bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó là $+\infty$ nếu hệ số cao nhất của tử và mẫu cùng dấu và kết quả là $-\infty$ nếu hệ số cao nhất của tử và mẫu trái dấu.

I. TỰ LUẬN

Bài 1: Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim \frac{2n^2 - n + 3}{3n^2 + 2n + 1}$$

$$b) \lim \frac{2n + 1}{n^3 + 4n^2 + 3}$$

$$c) \lim \frac{3n^3 + 2n^2 + n}{n^3 + 4}$$

$$d) \lim \frac{n^4}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}$$

$$e) \lim \frac{n^2 + 1}{2n^4 + n + 1}$$

$$f) \lim \frac{2n^4 + n^2 - 3}{3n^3 - 2n^2 + 1}$$

Bài 2: Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim \frac{1+3^n}{4+3^n}$$

$$b) \lim \frac{4 \cdot 3^n + 7^{n+1}}{2 \cdot 5^n + 7^n}$$

$$c) \lim \frac{4^{n+1} + 6^{n+2}}{5^n + 8^n}$$

$$d) \lim \frac{2^n + 5^{n+1}}{1 + 5^n}$$

$$e) \lim \frac{1 + 2 \cdot 3^n - 7^n}{5^n + 2 \cdot 7^n}$$

$$f) \lim \frac{1 - 2 \cdot 3^n + 6^n}{2^n(3^{n+1} - 5)}$$

Bài 3: Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim \frac{\sqrt{4n^2 + 1} + 2n - 1}{\sqrt{n^2 + 4n + 1} + n}$$

$$b) \lim \frac{\sqrt{n^2 + 3} - n - 4}{\sqrt{n^2 + 2} + n}$$

$$c) \lim \frac{n^2 + \sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4 + 1} + n^2}$$

$$\text{d) } \lim \frac{\sqrt{4n^2+1}+2n}{\sqrt{n^2+4n+1}+n} \quad \text{e) } \lim \frac{(2n\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}+3)}{(n+1)(n+2)} \quad \text{f) } \lim \frac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}+n}$$

Bài 4: Tính các giới hạn sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right) & \text{b) } \lim \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \right) \\ \text{c) } \lim \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) & \text{d) } \lim \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) \\ \text{e) } \lim \frac{1+2+\dots+n}{n^2+3n} & \text{f) } \lim \frac{1+2+2^2+\dots+2^n}{1+3+3^2+\dots+3^n} \end{array}$$

Bài 5: Tính các giới hạn sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim (\sqrt{n^2+2n}-n-1) & \text{b) } \lim (\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2}) & \text{c) } \lim (\sqrt[3]{2n-n^3}+n-1) \\ \text{d) } \lim (1+n^2-\sqrt{n^4+3n+1}) & \text{e) } \lim (\sqrt{n^2-n}-n) & \text{f) } \lim \frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}} \\ \text{g) } \lim \frac{\sqrt{4n^2+1}-2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}-n} & \text{h) } \lim \frac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}-n^2} & \text{i) } \lim \frac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}-n} \end{array}$$

Bài 6: Tính các giới hạn sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim \frac{2\cos n^2}{n^2+1} & \text{b) } \lim \frac{(-1)^n \sin(3n+n^2)}{3n-1} & \text{d) } \lim \frac{3\sin^6 n + 5\cos^2(n+1)}{n^2+1} \text{ e) } \\ \lim \frac{3\sin^2(n^3+2)+n^2}{2-3n^2} & \text{f) } \lim \frac{3n^2-2n+2}{n(3\cos n+2)} & \end{array}$$

Bài 7: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, với $\forall n \geq 2$.

a) Rút gọn u_n . b) Tìm $\lim u_n$.

Bài 8: a) Chứng minh: $\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$).

b) Rút gọn: $u_n = \frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$.

c) Tìm $\lim u_n$.

Bài 9: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^n} \end{cases} \quad (n \geq 1).$$

a) Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n$. Tính $v_1 + v_2 + \dots + v_n$ theo n .

b) Tính u_n theo n .

c) Tìm $\lim u_n$.

Bài 10: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 0; u_2 = 1 \\ 2u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, (n \geq 1) \end{cases}$

a) Chứng minh rằng: $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1, \forall n \geq 1$.

b) Đặt $v_n = u_n - \frac{2}{3}$. Tính v_n theo n . Từ đó tìm $\lim u_n$.

II. TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Giới hạn của dãy số hữu tỉ

Câu 1: Tìm $\lim \frac{2n^3 + n^2 - 3n + 1}{3n - 2}$ ta được:

A. $\frac{2}{3}$ B. 0 C. $+\infty$ D. 3

Câu 2: Tìm $\lim \frac{-n^3 + n^2 - 3n + 1}{4n + 2}$ ta được:

A. $-\infty$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $+\infty$ D. 0

Câu 3: Tìm $\lim \frac{3n^2 + n + 1}{2n^3 + 1}$ ta được:

A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $+\infty$ D. 0

Câu 4: Tìm $\lim \frac{-3n^2 + 5n + 1}{2n^2 - n + 3}$ ta được:

A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. 0 D. $+\infty$

Câu 5: Tìm $\lim \frac{n^4 - n^2 - 5}{2n^3 - 7n}$ ta được:

A. 4 B. $\frac{1}{2}$ C. $+\infty$ D. $-\infty$

Câu 6: Tìm $\lim \frac{2n^2 - n + 3}{3n^2 + 2n + 1}$ ta được:

A. $\frac{2}{3}$ B. 3 C. $-\frac{1}{2}$ D. 0

Câu 7: Tìm $\lim \frac{2n + 1}{n^3 + 4n^2 + 3}$ ta được:

A. $-\infty$ B. 0 C. 2 D. $\frac{1}{3}$

Câu 8: Tìm $\lim \frac{3n^3 + 2n^2 + n}{n^3 + 4}$ ta được:

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $+\infty$ D. 3

Câu 9: Tìm $\lim \frac{n^4}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}$ ta được:

- A. 4 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $+\infty$

Câu 10: Tìm $\lim \frac{n^2+1}{2n^4+n+1}$ ta được:

- A. $\frac{1}{2}$ B. 0 C. $-\infty$ D. 1

Câu 11: Tìm $\lim \frac{2n^4+n^2-3}{3n^3-2n^2+1}$ ta được:

- A. -3 B. $\frac{4}{3}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $+\infty$

Câu 12: Tìm $\lim \frac{\sqrt{4n^2+1}+2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}$ ta được:

- A. 2 B. 4 C. $+\infty$ D. 0

Câu 13: Tìm $\lim \frac{\sqrt{n^2+3}+n-4}{\sqrt{n^2+2}+n}$ ta được:

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

Câu 14: Tìm $\lim \frac{n^2+\sqrt[3]{1+n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2}$ ta được:

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

Câu 15: Tìm $\lim \frac{(2n\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}+3)}{(n+1)(n+2)}$ ta được:

- A. $+\infty$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 2

Câu 16: Tìm $\lim \frac{\sqrt{n^2-4n}+\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}+n}$ ta được:

- A. $\frac{3}{\sqrt{3}+1}$ B. $\frac{1}{\sqrt{3}+1}$ C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D. $\frac{4}{\sqrt{3}}$

Câu 17: Tìm $\lim \frac{\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{4n^2-2}}$ ta được:

- A. 1 B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. -1

Câu 18: Tìm $\lim \frac{\sqrt[3]{8n^3+1}}{2n-5}$ ta được:

A. 4 B. $+\infty$ C. $-\frac{1}{5}$ D. 1

Câu 19: Tìm $\lim \frac{\sqrt{4n^4 + n^2 + 3}}{3n + 2}$ ta được:

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $+\infty$ D. 4

Câu 20: Tìm $\lim \frac{-3n^4 + 2n^2 - 3n + 1}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1}}$ ta được:

A. -3 B. $-\infty$ C. 2 D. 1

Câu 21: Tìm $\lim \frac{3n - 1}{\sqrt{3n^2 + 2n - 2}}$ ta được:

A. $\sqrt{3}$ B. 1 C. 3 D. 0

Câu 22: Tìm $\lim \frac{3n^2 + 2n - 1}{\sqrt{4n^2 + n - 2}}$ ta được:

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $+\infty$

Câu 23: Tìm $\lim \frac{4n + 1}{\sqrt{3n^2 - 2n + 1} + 2n}$ ta được:

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{4}{\sqrt{3} + 2}$ C. 0 D. 2

Câu 24: Tìm $\lim \frac{\sqrt{3n^4 - n^3 + 4n^2 - n}}{3n^2 - 2}$ ta được:

A. $+\infty$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $+\infty$ D. $-\frac{1}{3}$

Câu 25: Tìm $\lim \frac{\sqrt{n + \sqrt{n + 1}}}{\sqrt{n} - \sqrt{n}}$ ta được:

A. 1 B. $+\infty$ C. -1 D. $\frac{1}{2}$

Câu 26: Tìm $\lim \frac{\sqrt[3]{8n^3 + 4n - 2}}{5n - 1}$ ta được:

A. $\frac{8}{5}$ B. $+\infty$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

Câu 27: Tìm $\lim \frac{\sqrt{n\sqrt{2n\sqrt{4n}}}}{n + 1}$ ta được:

A. 2 B. 4 C. $+\infty$ D. 0

Câu 28: Tìm $\lim \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{2n^2 + n - 1}$ ta được:

A. 0 B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $+\infty$

Dạng 2: Giới hạn của dãy có căn thức

Câu 1: Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n + 1} - n}{n + 1}$ ta được:

- A. -1 B. $\frac{1}{2}$ C. $+\infty$ D. 0

Câu 2: Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2 + 2n} - n}{3n - 2}$ ta được:

- A. $\frac{2}{3(\sqrt{3} + 2)}$ B. $\frac{2}{3(\sqrt{3} + 1)}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 3: Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n^2 + 1} - \sqrt{2n^2 - 1} \right)$ ta được:

- A. -1 B. 4 C. $+\infty$ D. 0

Câu 4: Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{3n + 2} - \sqrt{3n - 2} \right)$ ta được:

- A. 9 B. $-\infty$ C. 0 D. 6

Câu 5: Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n + 3} - \sqrt{n + 2} \right)$ ta được:

- A. $+\infty$ B. 5 C. $\frac{3}{2}$ D. 0

Câu 6: Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{2n + 1} - \sqrt{n^3 + n^2 + 1}}{\sqrt{4n^3 + 3n}}$ ta được:

- A. $+\infty$ B. 0 C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D. $\frac{1}{2(\sqrt{2} + 1)}$

Câu 7: Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 - 2n + 4} - n}{n + 1}$ ta được:

- A. 0 B. 1 C. 2 D. $+\infty$

Dạng 3: Dãy số chứa lũy thừa, Mũ

Câu 1: Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3^n}{4 + 3^n}$ ta được:

- A. $\frac{1}{4}$ B. $+\infty$ C. 1 D. $\frac{3}{4}$

Câu 2: Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 3^n + 7^{n+1}}{2 \cdot 5^n + 7^n}$ ta được:

- A. 1 B. 7 C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{7}{5}$

Câu 3: Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} + 6^{n+2}}{5^n + 8^n}$ ta được:

- A. 0 B. $\frac{6}{8}$ C. $-\infty$ D. $\frac{4}{5}$

Câu 4: Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 5^{n+1}}{1 + 5^n}$ ta được:

- A. 2 B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. 5

Câu 5: Tìm $\lim \frac{1+2.3^n-7^n}{5^n+2.7^n}$ ta được:

- A. 2 B. $\frac{1}{5}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. 0

Câu 6: Tìm $\lim \frac{1-2.3^n+6^n}{2^n(3^{n+1}-5)}$ ta được:

- A. $+\infty$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{1}{3}$

DẠNG 4. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Câu 1. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng 2, tổng của ba số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng $\frac{9}{4}$. Số hạng đầu u_1 của cấp số nhân đó là:

- A. $u_1 = 3$. B. $u_1 = 4$. C. $u_1 = \frac{9}{2}$. D. $u_1 = 5$.

Câu 2. Tính tổng $S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^{n-3}} + \dots$.

- A. $S = \frac{27}{2}$. B. $S = 14$. C. $S = 16$. D. $S = 15$.

Câu 3. Tính tổng $S = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right)$.

- A. $S = \sqrt{2} + 1$. B. $S = 2$. C. $S = 2\sqrt{2}$. D. $S = \frac{1}{2}$.

Câu 4. Tính tổng $S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{2^n}{3^n} + \dots$.

- A. $S = 3$. B. $S = 4$. C. $S = 5$. D. $S = 6$.

Câu 5. Tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \dots, \frac{-1^{n+1}}{2.3^{n-1}}, \dots$ bằng:

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{8}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{3}{8}$.

Câu 6. Tính tổng $S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) + \dots$.

- A. 1. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 7. Giá trị của giới hạn $\lim \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n} \quad |a| < 1, |b| < 1$ bằng:

- A. 0. B. $\frac{1-b}{1-a}$. C. $\frac{1-a}{1-b}$. D. Không tồn tại.

Câu 8. Rút gọn $S = 1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \dots + \cos^{2n} x + \dots$ với $\cos x \neq \pm 1$.

- A. $S = \sin^2 x$. B. $S = \cos^2 x$.

- C. $S = \frac{1}{\sin^2 x}$. D. $S = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Câu 9. Rút gọn $S = 1 - \sin^2 x + \sin^4 x - \sin^6 x + \dots + (-1)^n \cdot \sin^{2n} x + \dots$ với $\sin x \neq \pm 1$.

- A. $S = \sin^2 x$. B. $S = \cos^2 x$.

- C. $S = \frac{1}{1 + \sin^2 x}$. D. $S = \tan^2 x$.

Câu 10. Thu gọn $S = 1 - \tan \alpha + \tan^2 \alpha - \tan^3 \alpha + \dots$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

A. $S = \frac{1}{1 - \tan \alpha}$. B. $S = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}$.

C. $S = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$. D. $S = \tan^2 \alpha$.

Câu 11. Cho m, n là các số thực thuộc $[-1; 1]$ và các biểu thức:

$$\begin{aligned} M &= 1 + m + m^2 + m^3 + \dots \\ N &= 1 + n + n^2 + n^3 + \dots \\ A &= 1 + mn + m^2n^2 + m^3n^3 + \dots \end{aligned}$$

Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $A = \frac{MN}{M + N - 1}$. B. $A = \frac{MN}{M + N + 1}$.
C. $A = \frac{1}{M} + \frac{1}{N} - \frac{1}{MN}$. D. $A = \frac{1}{M} + \frac{1}{N} + \frac{1}{MN}$.

Câu 12. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,5111\dots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính tổng $T = a + b$.

A. 17. B. 68. C. 133. D. 137.

Câu 13. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $A = 0,353535\dots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $T = ab$.

A. 3456. B. 3465. C. 3645. D. 3546.

Câu 14. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $B = 5,231231\dots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $T = a - b$.

A. 1409. B. 1490. C. 1049. D. 1940.

Câu 15. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,17232323\dots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a - b > 2^{15}$. B. $a - b > 2^{14}$.
C. $a - b > 2^{13}$. D. $a - b > 2^{12}$.

