

CHỦ ĐỀ 1. NGUYÊN HÀM

KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. NGUYÊN HÀM VÀ TÍNH CHẤT

1. Nguyên hàm

Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

Định lý:

1) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C , hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

2) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.

Do đó $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K . Ký hiệu $\int f(x) dx = F(x) + C$.

2. Tính chất của nguyên hàm

Tính chất 1: $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$ và $\int f'(x) dx = f(x) + C$

Tính chất 2: $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với k là hằng số khác 0.

Tính chất 3: $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

3. Sự tồn tại của nguyên hàm

Định lý: Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

4. Bảng nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp

Nguyên hàm của hàm số sơ cấp	Nguyên hàm của hàm số hợp ($u = u(x)$)
$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int u^\alpha du = \frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{u} du = \ln u + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$

II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

1. Phương pháp đổi biến số

Định lý 1: Nếu $\int f(u) du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f(u(x))u'(x) dx = F(u(x)) + C$$

Hệ quả: Nếu $u = ax + b (a \neq 0)$ thì ta có $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$

2. Phương pháp nguyên hàm từng phần

Định lý 2: Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Hay

$$\int u dv = uv - \int v du$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 3x + 2$ là hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x + C.$

B. $F(x) = \frac{x^4}{3} + 3x^2 + 2x + C.$

C. $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x + C.$

D. $F(x) = 3x^2 + 3x + C.$

Câu 2. Hàm số $F(x) = 5x^3 + 4x^2 - 7x + 120 + C$ là họ nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = 15x^2 + 8x - 7.$

B. $f(x) = 5x^2 + 4x + 7.$

C. $f(x) = \frac{5x^2}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{7x^2}{2}.$

D. $f(x) = 5x^2 + 4x - 7.$

Câu 3. Họ nguyên hàm của hàm số: $y = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là

A. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| + C.$

B. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \ln x + C.$

C. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + \ln x + C.$

D. $F(x) = 2x - 3 - \frac{1}{x^2} + C.$

Câu 4. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)$

A. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C.$

B. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^2 + 2x + C.$

C. $F(x) = 2x + 3 + C.$

D. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^2 + 2x + C.$

Câu 5. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{2}{5-2x} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$ là hàm số nào?

A. $F(x) = -\ln|5-2x| + 2\ln|x| - \frac{3}{x} + C.$

B. $F(x) = -\ln|5-2x| + 2\ln|x| + \frac{3}{x} + C.$

C. $F(x) = \ln|5-2x| + 2\ln|x| - \frac{3}{x} + C.$

D. $F(x) = -\ln|5-2x| - 2\ln|x| + \frac{3}{x} + C.$

Câu 6. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$

A. $\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$

B. $\int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \cos 2x + C.$

C. $\int \sin 2x dx = \cos 2x + C.$

D. $\int \sin 2x dx = -\cos 2x + C.$

Câu 7. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right).$

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$

B. $\int f(x) dx = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$

C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{6} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$

Câu 8. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + \tan^2 \frac{x}{2}.$

A. $\int f(x) dx = 2 \tan \frac{x}{2} + C.$

B. $\int f(x) dx = \tan \frac{x}{2} + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + C.$

D. $\int f(x) dx = -2 \tan \frac{x}{2} + C.$

Câu 9. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$.

A. $\int f(x)dx = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C.$

C. $\int f(x)dx = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C.$

Câu 10. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x.$

A. $\int f(x)dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{\sin^4 x}{4} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$

D. $\int f(x)dx = -\frac{\sin^2 x}{2} + C.$

Câu 11. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - e^{-x}.$

A. $\int f(x)dx = e^x + e^{-x} + C.$

B. $\int f(x)dx = -e^x + e^{-x} + C.$

C. $\int f(x)dx = e^x - e^{-x} + C.$

D. $\int f(x)dx = -e^x - e^{-x} + C.$

Câu 12. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x \cdot 3^{-2x}.$

A. $\int f(x)dx = \left(\frac{2}{9}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 - \ln 9} + C.$

B. $\int f(x)dx = \left(\frac{9}{2}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 - \ln 9} + C.$

C. $\int f(x)dx = \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 - \ln 9} + C.$

D. $\int f(x)dx = \left(\frac{2}{9}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 + \ln 9} + C.$

Câu 13. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(3 + e^{-x})$ là

A. $F(x) = 3e^x + x + C.$

B. $F(x) = 3e^x + e^x \ln e^x + C.$

C. $F(x) = 3e^x - \frac{1}{e^x} + C.$

D. $F(x) = 3e^x - x + C.$

Câu 14. Hàm số $F(x) = 7e^x - \tan x$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = e^x \left(7 - \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right).$

B. $f(x) = 7e^x + \frac{1}{\cos^2 x}.$

C. $f(x) = 7e^x + \tan^2 x - 1.$

D. $f(x) = 7 \left(e^x - \frac{1}{\cos^2 x}\right).$

Câu 15. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{e^{4x-2}}.$

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}e^{2x-1} + C.$

B. $\int f(x)dx = e^{2x-1} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}e^{4x-2} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{e^{2x-1}} + C.$

Câu 16. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ là

A. $\int f(x)dx = \sqrt{2x-1} + C.$

B. $\int f(x)dx = 2\sqrt{2x-1} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{\sqrt{2x-1}}{2} + C.$

D. $\int f(x)dx = -2\sqrt{2x-1} + C.$

Câu 17. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}.$

A. $\int f(x)dx = -2\sqrt{3-x} + C.$

B. $\int f(x)dx = -\sqrt{3-x} + C.$

$$\text{C. } \int f(x)dx = 2\sqrt{3-x} + C.$$

$$\text{D. } \int f(x)dx = -3\sqrt{3-x} + C.$$

Câu 18. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+1}$.

$$\text{A. } \int f(x)dx = \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$$

$$\text{B. } \int f(x)dx = \frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$$

$$\text{C. } \int f(x)dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x+1} + C.$$

$$\text{D. } \int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$$

Câu 19. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{5-3x}$.

$$\text{A. } \int f(x)dx = -\frac{2}{9}(5-3x)\sqrt{5-3x} + C.$$

$$\text{B. } \int f(x)dx = -\frac{2}{3}(5-3x)\sqrt{5-3x}.$$

$$\text{C. } \int f(x)dx = \frac{2}{9}(5-3x)\sqrt{5-3x}.$$

$$\text{D. } \int f(x)dx = -\frac{2}{3}\sqrt{5-3x} + C.$$

Câu 20. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$.

$$\text{A. } \int f(x)dx = \frac{3}{4}(x-2)\sqrt[3]{x-2} + C.$$

$$\text{B. } \int f(x)dx = -\frac{3}{4}(x-2)\sqrt[3]{x-2} + C.$$

$$\text{C. } \int f(x)dx = \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x-2}.$$

$$\text{D. } \int f(x)dx = \frac{1}{3}(x-2)^{\frac{2}{3}} + C.$$

Câu 21. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{1-3x}$.

$$\text{A. } \int f(x)dx = -\frac{1}{4}(1-3x)\sqrt[3]{1-3x} + C.$$

$$\text{B. } \int f(x)dx = -\frac{3}{4}(1-3x)\sqrt[3]{1-3x} + C.$$

$$\text{C. } \int f(x)dx = \frac{1}{4}(1-3x)\sqrt[3]{1-3x} + C.$$

$$\text{D. } \int f(x)dx = -(1-3x)^{\frac{2}{3}} + C.$$

Câu 22. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{e^{3x}}$.

$$\text{A. } \int f(x)dx = \frac{2\sqrt{e^{3x}}}{3} + C$$

$$\text{B. } \int f(x)dx = \frac{3}{2\sqrt{e^{3x}}} + C$$

$$\text{C. } \int f(x)dx = \frac{3\sqrt{e^{3x}}}{2} + C$$

$$\text{D. } \int f(x)dx = \frac{2e^{\frac{3x+2}{2}}}{3x+2} + C$$

Câu 23. Hàm số $F(x) = (x+1)^2 \sqrt{x+1} + 2016$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

$$\text{A. } f(x) = \frac{5}{2}(x+1)\sqrt{x+1}$$

$$\text{B. } f(x) = \frac{5}{2}(x+1)\sqrt{x+1} + C$$

$$\text{C. } f(x) = \frac{2}{5}(x+1)\sqrt{x+1}$$

$$\text{D. } f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} + C$$

Câu 24. Biết một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-3x}} + 1$ là hàm số $F(x)$ thỏa mãn $F(-1) = \frac{2}{3}$.

Khi đó $F(x)$ là hàm số nào sau đây?

$$\text{A. } F(x) = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + 3$$

$$\text{B. } F(x) = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} - 3$$

$$\text{C. } F(x) = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + 1$$

$$\text{D. } F(x) = 4 - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x}$$

Câu 25. Biết $F(x) = 6\sqrt{1-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{a}{\sqrt{1-x}}$. Khi đó giá trị của a bằng

$$\text{A. } -3.$$

$$\text{B. } 3.$$

$$\text{C. } 6.$$

$$\text{D. } \frac{1}{6}.$$

4.1.5. PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Câu 26. Tính $F(x) = \int x \sin x dx$ bằng

A. $F(x) = \sin x - x \cos x + C$.

C. $F(x) = \sin x + x \cos x + C$.

B. $F(x) = x \sin x - \cos x + C$.

D. $F(x) = x \sin x + \cos x + C$.

Câu 27. Tính $\int x \ln^2 x dx$. Chọn kết quả đúng:

A. $\frac{1}{4} x^2 (2 \ln^2 x - 2 \ln x + 1) + C$.

B. $\frac{1}{2} x^2 (2 \ln^2 x - 2 \ln x + 1) + C$.

C. $\frac{1}{4} x^2 (2 \ln^2 x + 2 \ln x + 1) + C$.

D. $\frac{1}{2} x^2 (2 \ln^2 x + 2 \ln x + 1) + C$.

Câu 28. Tính $F(x) = \int x \sin x \cos x dx$. Chọn kết quả đúng:

A. $F(x) = \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x + C$.

B. $F(x) = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{x}{2} \sin 2x + C$.

C. $F(x) = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{8} \cos 2x + C$.

D. $F(x) = \frac{-1}{4} \sin 2x - \frac{x}{8} \cos 2x + C$.

Câu 29. Tính $F(x) = \int x e^{\frac{x}{3}} dx$. Chọn kết quả đúng

A. $F(x) = 3(x-3)e^{\frac{x}{3}} + C$

B. $F(x) = (x+3)e^{\frac{x}{3}} + C$

C. $F(x) = \frac{x-3}{3} e^{\frac{x}{3}} + C$

D. $F(x) = \frac{x+3}{3} e^{\frac{x}{3}} + C$

Câu 30. Tính $F(x) = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$. Chọn kết quả đúng

A. $F(x) = x \tan x + \ln |\cos x| + C$.

B. $F(x) = -x \cot x + \ln |\cos x| + C$.

C. $F(x) = -x \tan x + \ln |\cos x| + C$.

D. $F(x) = -x \cot x - \ln |\cos x| + C$.

Câu 31. Tính $F(x) = \int x^2 \cos x dx$. Chọn kết quả đúng

A. $F(x) = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C$.

B. $F(x) = 2x^2 \sin x - x \cos x + \sin x + C$.

C. $F(x) = x^2 \sin x - 2x \cos x + 2 \sin x + C$.

D. $F(x) = (2x + x^2) \cos x - x \sin x + C$.

Câu 32. Tính $F(x) = \int x \sin 2x dx$. Chọn kết quả đúng

A. $F(x) = -\frac{1}{4} (2x \cos 2x - \sin 2x) + C$.

B. $F(x) = \frac{1}{4} (2x \cos 2x - \sin 2x) + C$.

C. $F(x) = -\frac{1}{4} (2x \cos 2x + \sin 2x) + C$.

D. $F(x) = \frac{1}{4} (2x \cos 2x + \sin 2x) + C$.

Câu 33. Hàm số $F(x) = x \sin x + \cos x + 2017$ là một nguyên hàm của hàm số nào?

A. $f(x) = x \cos x$.

B. $f(x) = x \sin x$.

C. $f(x) = -x \cos x$.

D. $f(x) = -x \sin x$.

Câu 34. Tính $\int \frac{1 + \ln(x+1)}{x^2} dx$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\frac{-1 + \ln(x+1)}{x} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$

B. $-\frac{1 + \ln(x+1)}{x} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$

C. $-\frac{x+1}{x} (1 + \ln(x+1)) + \ln |x| + C$

D. $-\frac{1 + \ln(x+1)}{x} - \ln |x+1| + \ln |x| + C$

Câu 35. Hãy chọn mệnh đề **đúng**

A. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (0 < a \neq 1)$.

B. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

C. $\int f(x) \cdot g(x) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$.

D. $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx}$.

Câu 36. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int \sin x dx = \cos x + C$.

B. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, x \neq 0$.

D. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (0 < a \neq 1)$.

C. $\int e^x dx = e^x + C$.

Câu 37. Hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + 3 + \frac{1}{x}$ có nguyên hàm là

A. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 3x + \ln|x| + C$.

B. $F(x) = x^4 - \frac{x^3}{3} + 3x + \ln|x| + C$.

C. $F(x) = 3x^2 - 2x - \frac{1}{x^2} + C$.

D. $F(x) = x^4 - x^3 + 3x + \ln|x| + C$.

Câu 38. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 x$ là

A. $F(x) = \tan x - x + C$.

B. $F(x) = -\tan x + x + C$.

C. $F(x) = \tan x + x + C$.

D. $F(x) = -\tan x - x + C$.

Câu 39. Hàm số $F(x) = 7 \sin x - \cos x + 1$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = \sin x + 7 \cos x$.

B. $f(x) = -\sin x + 7 \cos x$.

C. $f(x) = \sin x - 7 \cos x$.

D. $f(x) = -\sin x - 7 \cos x$.

Câu 40. Kết quả tính $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ là

A. $\tan x - \cot x + C$.

B. $\cot 2x + C$.

C. $\tan 2x - x + C$.

D. $-\tan x + \cot x + C$.

Câu 41. Hàm số $F(x) = 3x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} - 1$ có một nguyên hàm là

A. $f(x) = x^3 - 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} - x$.

B. $f(x) = x^3 - \sqrt{x} - \frac{1}{x} - x$.

C. $f(x) = x^3 - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

D. $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x} - x$.

Câu 42. Hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^5 x}$ có một nguyên hàm $F(x)$ bằng

A. $-\frac{1}{4 \sin^4 x}$.

B. $\frac{1}{4 \sin^4 x}$.

C. $\frac{4}{\sin^4 x}$.

D. $\frac{-4}{\sin^4 x}$.

Câu 43. Kết quả tính $\int 2x\sqrt{5-4x^2} dx$ bằng

A. $-\frac{1}{6}\sqrt{(5-4x^2)^3} + C$.

B. $-\frac{3}{8}\sqrt{(5-4x^2)} + C$.

C. $\frac{1}{6}\sqrt{(5-4x^2)^3} + C$.

D. $-\frac{1}{12}\sqrt{(5-4x^2)^3} + C$.

Câu 44. Kết quả $\int e^{\sin x} \cos x dx$ bằng

A. $e^{\sin x} + C$.

B. $\cos x \cdot e^{\sin x} + C$.

C. $e^{\cos x} + C$.

D. $e^{-\sin x} + C$.

Câu 45. Tính $\int \tan x dx$ bằng

A. $-\ln|\cos x| + C$.

B. $\ln|\cos x| + C$.

C. $\frac{1}{\cos^2 x} + C$.

D. $\frac{-1}{\cos^2 x} + C$.

Câu 46. Tính $\int \cot x dx$ bằng

A. $\ln|\sin x| + C$.

B. $-\ln|\sin x| + C$.

C. $\frac{-1}{\sin^2 x} + C$.

D. $\frac{1}{\sin^2 x} - C$.

Câu 47. Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{x^3}{x-1}$ là

A. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| + C.$

B. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x+1| + C.$

C. $\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| + C.$

D. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x + \ln|x-1| + C.$

Câu 48. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x+1}$ là

A. $\frac{x^2}{2} - 3x + 6\ln|x+1|.$

B. $\frac{x^2}{2} + 3x + 6\ln|x+1|.$

C. $\frac{x^2}{2} + 3x - 6\ln|x+1|.$

D. $\frac{x^2}{2} - 3x + 6\ln(x+1).$

Câu 49. Kết quả tính $\int \frac{1}{x(x+3)} dx$ bằng

A. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C.$

B. $-\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C.$

C. $\frac{2}{3} \ln \left| \frac{x+3}{x} \right| + C.$

D. $\frac{2}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C.$

Câu 50. Kết quả tính $\int \frac{1}{x(x-3)} dx$ bằng

A. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-3}{x} \right| + C.$

B. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+3}{x} \right| + C.$

C. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C.$

D. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x-3} \right| + C.$

Câu 51. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$ là

A. $F(x) = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C.$

B. $F(x) = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+2}{x-1} \right| + C.$

C. $F(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C.$

D. $F(x) = \ln|x^2 + x - 2| + C.$

Câu 52. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^2$ là

A. $F(x) = -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C.$

B. $F(x) = -\frac{1}{x} - 2\ln x + x + C.$

C. $F(x) = \frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C.$

D. $F(x) = -\frac{1}{x} - 2\ln|x| - x + C.$

Câu 53. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}$ với $a \neq 0$ là

A. $\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$

B. $\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C.$

C. $\frac{1}{a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$

D. $\frac{1}{a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C.$

Câu 54. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$ thỏa mãn $F(2) = 0$. Khi đó phương trình $F(x) = x$ có nghiệm là

- A. $x=1-\sqrt{3}$. B. $x=1$. C. $x=-1$. D. $x=0$.

Câu 55. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$ thì $F(3)$ bằng

- A. $\ln 2 + 1$. B. $\ln \frac{3}{2}$. C. $\ln 2$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 56. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\ln^2 x + 1} \cdot \frac{\ln x}{x}$ thoả mãn $F(1) = \frac{1}{3}$. Giá trị của $F^2(e)$ là

- A. $\frac{8}{9}$. B. $\frac{1}{9}$. C. $\frac{8}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 57. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{\sin^2 x}$ thoả mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ là

- A. $-\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$. B. $\cot x - x^2 + \frac{\pi^2}{16}$.
 C. $-\cot x + x^2$. D. $\cot x - x^2 - \frac{\pi^2}{16}$.

Câu 58. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^2 x \cdot \sin x$.

- A. $\int f(x)dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$. B. $\int f(x)dx = \frac{\cos^3 x}{3} + C$.
 C. $\int f(x)dx = -\frac{\sin^2 x}{2} + C$. D. $\int f(x)dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C$.

Câu 59. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x - 1}$.

- A. $\int f(x)dx = -\ln|\sin x| + C$. B. $\int f(x)dx = \ln|\cos 2x - 1| + C$.
 C. $\int f(x)dx = \ln|\sin 2x| + C$. D. $\int f(x)dx = \ln|\sin x| + C$.

Câu 60. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x \cdot \cos 2x$.

- A. $\int f(x)dx = \frac{-2\cos^3 x}{3} + \cos x + C$. B. $\int f(x)dx = \frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{2}\sin x + C$.
 C. $\int f(x)dx = \frac{\cos^3 x}{3} + \cos x + C$. D. $\int f(x)dx = \frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\sin x + C$.

Câu 61. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sin x \cdot \cos 3x$.

- A. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\cos 4x + C$. B. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos 4x + C$.
 C. $\int f(x)dx = 2\cos^4 x + 3\cos^2 x + C$. D. $\int f(x)dx = 3\cos^4 x - 3\cos^2 x + C$.

Câu 62. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \sin 3x$.

- A. $\int f(x)dx = \frac{3}{8}\left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{4}\right) - \frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin 6x}{6}\right) + C$.
 B. $\int f(x)dx = \frac{3}{8}\left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{4}\right) + \frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin 6x}{6}\right) + C$.
 C. $\int f(x)dx = \frac{1}{8}\left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{4}\right) - \frac{3}{8}\left(x - \frac{\sin 6x}{6}\right) + C$.
 D. $\int f(x)dx = \frac{3}{8}\left(\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{4}\right) - \frac{1}{8}\left(x + \frac{\sin 6x}{6}\right) + C$.

Câu 63. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos 3x + \cos^3 x \cdot \sin 3x$.

A. $\int f(x)dx = \frac{-3}{16} \cos 4x + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{3}{16} \cos 4x + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{-3}{16} \sin 4x + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{3}{16} \sin 4x + C.$

Câu 64. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$ biết $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

A. $F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} + \frac{1}{2}.$

B. $F(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \frac{3}{2}.$

C. $F(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \frac{1}{2}.$

D. $F(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \frac{5}{2}.$

Câu 65. Hàm số $f(x) = e^x \left(\ln 2 + \frac{e^{-x}}{\sin^2 x} \right)$ có họ nguyên hàm là

A. $F(x) = e^x \ln 2 - \cot x + C.$

B. $F(x) = e^x \ln 2 + \cot x + C.$

C. $F(x) = e^x \ln 2 + \frac{1}{\cos^2 x} + C.$

D. $F(x) = e^x \ln 2 - \frac{1}{\cos^2 x} + C.$

Câu 66. Hàm số $f(x) = 3^x - 2^x \cdot 3^x$ có nguyên hàm bằng

A. $\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{6^x}{\ln 6} + C.$

B. $3^x \ln 3(1 + 2^x \ln 2) + C.$

C. $\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{3^x \cdot 2^x}{\ln 6} + C.$

D. $\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{6^x}{\ln 3 \cdot \ln 2} + C.$

Câu 67. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = (e^{-x} + e^x)^2$ thỏa mãn điều kiện $F(0) = 1$ là

A. $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{2x} + 2x + 1.$

B. $F(x) = -2e^{-2x} + 2e^{2x} + 2x + 1.$

C. $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{2x} + 2x.$

D. $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - 1.$

Câu 68. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.

A. $F(x) = 2x - 3 \ln|x+1| + C.$

B. $F(x) = 2x + 3 \ln|x+1| + C.$

C. $F(x) = 2x - \ln|x+1| + C.$

D. $F(x) = 2x + \ln|x+1| + C.$

Câu 69. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x^2 + 2x + 3}{2x + 1}$.

A. $F(x) = \frac{1}{8}(2x+1)^2 + \frac{5}{4} \ln|2x+1| + C.$

B. $F(x) = \frac{1}{8}(2x+1)^2 + 5 \ln|2x+1| + C.$

C. $F(x) = (2x+1)^2 + \ln|2x+1| + C.$

D. $F(x) = (2x+1)^2 - \ln|2x+1| + C.$

Câu 70. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$.

A. $F(x) = \frac{x^2}{2} - \ln(x^2 + 1) + C.$

B. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln(x^2 + 1) + C.$

C. $F(x) = x^2 - \ln(x^2 + 1) + C.$

D. $F(x) = x^2 + \ln(x^2 + 1) + C.$

Câu 71. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x \ln x + x}$.

A. $F(x) = \ln|\ln x + 1| + C.$

B. $F(x) = \ln|\ln x - 1| + C.$

C. $F(x) = \ln|x+1| + C.$

D. $F(x) = \ln x + 1 + C.$

Câu 72. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$.

A. $F(x) = e^x - \ln(e^x + 1) + C.$

B. $F(x) = e^x + \ln(e^x + 1) + C.$

C. $F(x) = \ln(e^x + 1) + C.$

D. $F(x) = e^{2x} - e^x + C.$

CHỦ ĐỀ 2. TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử F là một nguyên hàm của f trên $[a; b]$. Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a; b]$) của hàm số

$$f(x), \text{ kí hiệu là } \int_a^b f(x) dx.$$

Ta dùng kí hiệu $F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ để chỉ hiệu số $F(b) - F(a)$. Vậy $\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.

Nhận xét: Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x) dx$ hay $\int_a^b f(t) dt$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

Ý nghĩa hình học của tích phân: Nếu hàm số f liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì tích phân $\int_a^b f(x) dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường

thẳng $x = a, x = b$. Vậy $S = \int_a^b f(x) dx$.

2. Tính chất của tích phân

1. $\int_a^a f(x) dx = 0$

2. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

3. $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$ ($a < b < c$)

4. $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$ ($k \in \mathbb{R}$)

5. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$.

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

1. Một số phương pháp tính tích phân

I. Dạng 1: Tính tích phân theo công thức

Ví dụ 1: Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^3}$.

b) $I = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$.

c) $I = \int_0^1 \frac{2x+9}{x+3} dx$.

d) $I = \int_0^1 \frac{x}{4-x^2} dx$.

Hướng dẫn giải

a) $I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^3} = \int_0^1 \frac{d(1+x)}{(1+x)^3} = -\frac{1}{2(1+x)^2} \Big|_0^1 = \frac{3}{8}$.

$$b) I = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = (x - \ln(x+1)) \Big|_0^1 = 1 - \ln 2.$$

$$c) I = \int_0^1 \frac{2x+9}{x+3} dx = \int_0^1 \left(2 + \frac{3}{x+3}\right) dx = (2x + 3\ln(x+3)) \Big|_0^1 = 3 + 6\ln 2 - 3\ln 3.$$

$$d) I = \int_0^1 \frac{x}{4-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(4-x^2)}{4-x^2} = \ln|4-x^2| \Big|_0^1 = \ln \frac{3}{4}.$$

Bài tập áp dụng

$$1) I = \int_0^1 x^3(x^4 - 1)^5 dx.$$

$$2) I = \int_0^1 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x} + 1) dx.$$

$$3) I = \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx.$$

$$4) I = \int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}}.$$

II. Dạng 2: Dùng tính chất cận trung gian để tính tích phân

Sử dụng tính chất $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 2: Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 |x+1| dx$.

Hướng dẫn giải

Nhận xét: $|x+1| = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x \leq 2 \\ -x-1, & -2 \leq x < -1 \end{cases}$. Do đó

$$I = \int_{-2}^2 |x+1| dx = \int_{-2}^{-1} |x+1| dx + \int_{-1}^2 |x+1| dx = -\int_{-2}^{-1} (x+1) dx + \int_{-1}^2 (x+1) dx = -\left(\frac{x^2}{2} + x\right) \Big|_{-2}^{-1} + \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \Big|_{-1}^2 = 5.$$

Bài tập áp dụng

$$1) I = \int_{-4}^3 |x^2 - 4| dx.$$

$$2) I = \int_{-1}^2 |x^3 - 2x^2 - x + 2| dx.$$

$$3) I = \int_0^3 |2^x - 4| dx.$$

$$4) I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2|\sin x| dx.$$

$$5) I = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx.$$

III. Dạng 3: Phương pháp đổi biến số

1) Đổi biến số dạng 1

Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $\alpha \leq u(x) \leq \beta$. Giả sử có thể viết $f(x) = g(u(x))u'(x)$, $x \in [a; b]$, với g liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$. Khi đó, ta có

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u) du.$$

Ví dụ 3: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u = \sin x$. Ta có $du = \cos x dx$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow u(0)=0$; $x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

Khi đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3} u^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

Bài tập áp dụng

1) $I = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx$.

2) $I = \int_0^1 x^3\sqrt{x+1} dx$.

3) $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$.

4) $I = \int_e^{e^2} \frac{dx}{2x\sqrt{2+\ln x}}$.

Dấu hiệu nhận biết và cách tính tích phân

	Dấu hiệu	Có thể đặt	Ví dụ
1	Có $\sqrt{f(x)}$	$t = \sqrt{f(x)}$	$I = \int_0^3 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+1}}$. Đặt $t = \sqrt{x+1}$
2	Có $(ax+b)^n$	$t = ax+b$	$I = \int_0^1 x(x+1)^{2016} dx$. Đặt $t = x+1$
3	Có $a^{f(x)}$	$t = f(x)$	$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x+3}}{\cos^2 x} dx$. Đặt $t = \tan x+3$
4	Có $\frac{dx}{x}$ và $\ln x$	$t = \ln x$ hoặc biểu thức chứa $\ln x$	$I = \int_1^e \frac{\ln x dx}{x(\ln x+1)}$. Đặt $t = \ln x+1$
5	Có $e^x dx$	$t = e^x$ hoặc biểu thức chứa e^x	$I = \int_0^{\ln 2} e^{2x} \sqrt{3e^x+1} dx$. Đặt $t = \sqrt{3e^x+1}$
6	Có $\sin x dx$	$t = \cos x$	$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx$. Đặt $t = \sin x$
7	Có $\cos x dx$	$t = \sin x dx$	$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{2\cos x+1} dx$ Đặt $t = 2\cos x+1$
8	Có $\frac{dx}{\cos^2 x}$	$t = \tan x$	$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 x) \frac{1}{\cos^2 x} dx$ Đặt $t = \tan x$
9	Có $\frac{dx}{\sin^2 x}$	$t = \cot x$	$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\cot x}}{1-\cos 2x} dx = \int \frac{e^{\cot x}}{2\sin^2 x} dx$. Đặt $t = \cot x$

2) Đổi biến số dạng 2

Cho hàm số f liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[a; b]$. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$ (*) sao cho $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ và $a \leq \varphi(t) \leq b$ với mọi $t \in [\alpha; \beta]$. Khi đó:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Một số phương pháp đổi biến: Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có dạng

- $\sqrt{a^2 - x^2}$: đặt $x = |a| \sin t; t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- $\sqrt{x^2 - a^2}$: đặt $x = \frac{|a|}{\sin t}; t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$
- $\sqrt{x^2 + a^2}$: $x = |a| \tan t; t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
- $\frac{\sqrt{a+x}}{a-x}$ hoặc $\frac{\sqrt{a-x}}{a+x}$: đặt $x = a \cos 2t$

Lưu ý: Chỉ nên sử dụng phép đặt này khi các dấu hiệu 1, 2, 3 đi với x mũ chẵn. Ví dụ, để tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+1}}$ thì phải đổi biến dạng 2 còn với tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}}$ thì nên đổi biến dạng 1.

Ví dụ 4: Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$

b) $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $x = \sin t$ ta có $dx = \cos t dt$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

Vậy $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

b) Đặt $x = \tan t$, ta có $dx = (1 + \tan^2 t) dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Vậy $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$

IV. Dạng 4: Phương pháp tính tích phân từng phần.

Định lí: Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = (u(x)v(x)) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx,$$

hay viết gọn là $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$. Các dạng cơ bản: Giả sử cần tính $I = \int_a^b P(x).Q(x)dx$

Dạng hàm	P(x): Đa thức Q(x): $\sin(kx)$ hay $\cos(kx)$	P(x): Đa thức Q(x): e^{kx}	P(x): Đa thức Q(x): $\ln(ax+b)$	P(x): Đa thức Q(x): $\frac{1}{\sin^2 x}$ hay $\frac{1}{\cos^2 x}$
Cách đặt	* $u = P(x)$ * dv là Phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân	* $u = P(x)$ * dv là Phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân	* $u = \ln(ax+b)$ * $dv = P(x)dx$	* $u = P(x)$ * dv là Phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân

Ví dụ 5: Tính các tích phân sau : a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx.$ b) $I = \int_0^{e-1} x \ln(x+1) dx.$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases}$ ta có $\begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$.

Do đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = (-x \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0 + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

b) Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = x dx \end{cases}$ ta có $\begin{cases} du = \frac{1}{x+1} dx \\ v = \frac{x^2-1}{2} \end{cases}$

$$I = \int_0^{e-1} x \ln(x+1) dx = \left[\ln(x+1) \frac{x^2-1}{2} \right]_0^{e-1} - \frac{1}{2} \int_0^{e-1} (x-1) dx = \frac{e^2-2e+2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_0^{e-1}$$

$$= \frac{e^2-2e+2}{2} - \frac{1}{2} \frac{e^2-4e+3}{2} = \frac{e^2+1}{4}.$$

Bài tập áp dụng

1) $I = \int_0^1 (2x+2)e^x dx$. 2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cdot \cos x dx$. 3) $I = \int_0^{2\pi} x^2 \cdot \sin \frac{x}{2} dx$. 4) $I = \int_0^1 (x+1)^2 e^{2x} dx$.

II – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hai hàm số f , g liên tục trên đoạn $[a; b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$. **B.** $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

C. $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$. **D.** $\int_a^b xf(x) dx = x \int_a^b f(x) dx$.

Câu 2. Cho hàm số f liên tục trên \mathbb{R} và số thực dương a . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào luôn đúng?

A. $\int_a^a f(x) dx = 0$. **B.** $\int_a^a f(x) dx = 1$. **C.** $\int_a^a f(x) dx = -1$. **D.** $\int_a^a f(x) dx = f(a)$.

Câu 3. Tích phân $\int_0^1 dx$ có giá trị bằng

A. -1 . **B.** 1 . **C.** 0 . **D.** 2 .

Câu 4. Cho số thực a thỏa mãn $\int_{-1}^a e^{x+1} dx = e^2 - 1$, khi đó a có giá trị bằng

A. 1 . **B.** -1 . **C.** 0 . **D.** 2 .

Câu 5. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có tích phân trên đoạn $[0; \pi]$ đạt giá trị bằng 0?

A. $f(x) = \cos 3x$. **B.** $f(x) = \sin 3x$.

C. $f(x) = \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$. **D.** $f(x) = \sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 6. Trong các tích phân sau, tích phân nào có giá trị **khác** 2?

A. $\int_1^{e^2} \ln x dx$. **B.** $\int_0^1 2 dx$. **C.** $\int_0^{\pi} \sin x dx$. **D.** $\int_0^2 x dx$.

Câu 7. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào thỏa mãn $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-2}^2 f(x) dx$?

A. $f(x) = e^x$. **B.** $f(x) = \cos x$. **C.** $f(x) = \sin x$. **D.** $f(x) = x+1$.

Câu 8. Tích phân $I = \int_2^5 \frac{dx}{x}$ có giá trị bằng

A. $3 \ln 3$. **B.** $\frac{1}{3} \ln 3$. **C.** $\ln \frac{5}{2}$. **D.** $\ln \frac{2}{5}$.

Câu 9. Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$ có giá trị bằng

- A. $\frac{1}{2} \ln \frac{1}{3}$. B. $2 \ln 3$. C. $\frac{1}{2} \ln 3$. D. $2 \ln \frac{1}{3}$.

Câu 10. Nếu $\int_{-2}^0 (4 - e^{-x/2}) dx = K - 2e$ thì giá trị của K là

- A. 12,5. B. 9. C. 11. D. 10.

Câu 11. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 2} dx$ có giá trị bằng

- A. $\frac{2 \ln 2}{3}$. B. $-\frac{2 \ln 2}{3}$. C. $-2 \ln 2$. D. $2 \ln 2$.

Câu 12. Cho hàm số f và g liên tục trên đoạn $[1;5]$ sao cho $\int_1^5 f(x) dx = 2$ và $\int_1^5 g(x) dx = -4$. Giá trị của $\int_1^5 [g(x) - f(x)] dx$ là

- A. -6 . B. 6 . C. 2 . D. -2 .

Câu 13. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0;3]$. Nếu $\int_0^3 f(x) dx = 2$ thì tích phân $\int_0^3 [x - 2f(x)] dx$ có giá trị bằng

- A. 7 . B. $\frac{5}{2}$. C. 5 . D. $\frac{1}{2}$.

Câu 14. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0;6]$. Nếu $\int_1^5 f(x) dx = 2$ và $\int_1^3 f(x) dx = 7$ thì $\int_3^5 f(x) dx$ có giá trị bằng

- A. 5 . B. -5 . C. 9 . D. -9 .

Câu 15. Trong các phép tính sau đây, phép tính nào **sai**?

A. $\int_1^3 e^x dx = (e^x)|_1^3$. B. $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x} dx = (\ln x)|_{-3}^{-2}$.

C. $\int_{\pi}^{2\pi} \cos x dx = (\sin x)|_{\pi}^{2\pi}$. D. $\int_1^2 (x+1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)|_1^2$.

Câu 16. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ có một nguyên hàm là hàm F trên đoạn $[a;b]$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai** ?

A. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

B. $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (a;b)$.

C. $\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a)$.

D. Hàm số G cho bởi $G(x) = F(x) + 5$ cũng thỏa mãn $\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$.

Câu 17. Xét hàm số f liên tục trên \mathbb{R} và các số thực a, b, c tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx$. B. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
- C. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$. D. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$.

Câu 18. Xét hai hàm số f và g liên tục trên đoạn $[a; b]$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Nếu $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a; b]$ thì $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.
- B. Nếu $f(x) \geq m \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq m(b-a)$.
- C. Nếu $f(x) \leq M \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.
- D. Nếu $f(x) \geq m \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq m(a-b)$.

Câu 19. Cho hai hàm số f và g liên tục trên đoạn $[a; b]$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \in [a; b]$. Xét các khẳng định sau:

- I. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
- II. $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.
- III. $\int_a^b [f(x) \cdot g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$.
- IV. $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$.

Trong các khẳng định trên, có bao nhiêu khẳng định **sai**?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 20. Tích phân $\int_0^3 x(x-1)dx$ có giá trị bằng với giá trị của tích phân nào trong các tích phân dưới đây?

- A. $\int_0^2 (x^2 + x - 3)dx$. B. $3 \int_0^{3\pi} \sin x dx$. C. $\int_0^{\ln \sqrt{10}} e^{2x} dx$. D. $\int_0^{\pi} \cos(3x + \pi) dx$.

CHƯƠNG III. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN
BÀI 1. TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

C. LÝ THUYẾT

1. Hệ trục tọa độ trong không gian

Trong không gian, xét ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một và chung một điểm gốc O . Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vector đơn vị, tương ứng trên các trục Ox, Oy, Oz . Hệ ba trục như vậy gọi là **hệ trục tọa độ vuông góc** trong không gian.

Chú ý: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$.

2. Tọa độ của vector

a) **Định nghĩa:** $\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

b) **Tính chất:** Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3), k \in \mathbb{R}$

$$\bullet \vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$$

$$\bullet k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$$

$$\bullet \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\bullet \vec{0} = (0; 0; 0), \vec{i} = (1; 0; 0), \vec{j} = (0; 1; 0), \vec{k} = (0; 0; 1)$$

$$\bullet \vec{a} \text{ cùng phương } \vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, \quad (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$$

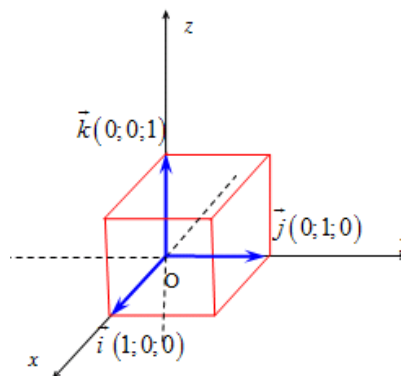
$$\bullet \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\bullet \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

$$\bullet \vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$\bullet |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\bullet \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (\text{với } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0})$$



3. Tọa độ của điểm

a) **Định nghĩa:** $M(x; y; z) \Leftrightarrow \overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (x : hoành độ, y : tung độ, z : cao độ)

Chú ý: $M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0; M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0; M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0$

$M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0; M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0; M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0$.

b) **Tính chất:** Cho $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$

$$\bullet \overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

$$\bullet AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$\bullet \text{Toạ độ trung điểm } M \text{ của đoạn thẳng } AB: M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

\bullet Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC :

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

\bullet Toạ độ trọng tâm G của tứ diện $ABCD$:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$$

Chú ý:

– **Tích vô hướng** của hai vector thường sử dụng để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, tính góc giữa hai đường thẳng.

– **Tích có hướng** của hai vector thường sử dụng để tính diện tích tam giác; tính thể tích khối tứ diện, thể tích hình hộp; chứng minh các vector đồng phẳng – không đồng phẳng, chứng minh các vector cùng phương.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$$

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{a}(a_1; a_2; a_3), \vec{b}(b_1; b_2; b_3)$. Chọn khẳng định **sai**.

A. $k \cdot \vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$.

B. $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

D. $|\vec{a}|^2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có ba đỉnh $A(2; 1; -3), B(4; 2; 1), C(3; 0; 5)$ và $G(a; b; c)$ là trọng tâm của tam giác ABC . Tính giá trị biểu thức $P = a.b.c$?

A. $P = 0$.

B. $P = 3$.

C. $P = 5$.

D. $P = 4$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 2; 3)$ và $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{k}$. Tính tọa độ vectơ $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$

A. $\vec{u} = (-1; 2; 7)$.

B. $\vec{u} = (-1; 6; 3)$.

C. $\vec{u} = (-1; 2; -1)$.

D. $\vec{u} = (-1; -2; 3)$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 1; 0), B(0; 5; 0), C(2; 0; 3)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

A. $G(1; 2; 1)$.

B. $G\left(\frac{3}{2}; 3; \frac{3}{2}\right)$.

C. $G(3; 6; 3)$.

D. $G(1; 1; 2)$.

Câu 5: Hai điểm M và M' phân biệt và đối xứng nhau qua mặt phẳng Oxy . Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Hai điểm M và M' có cùng tung độ và cao độ.

B. Hai điểm M và M' có cùng hoành độ và cao độ.

C. Hai điểm M và M' có hoành độ đối nhau.

D. Hai điểm M và M' có cùng hoành độ và tung độ.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Tìm tọa độ hình chiếu M lên trục Ox .

A. $(2; 0; 0)$.

B. $(1; 0; 0)$.

C. $(3; 0; 0)$.

D. $(0; 2; 3)$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Tìm tọa độ điểm N đối xứng với điểm M qua mặt phẳng (Oxy)

A. $N(-1; -2; -3)$.

B. $N(1; 2; 0)$.

C. $N(-1; -2; 3)$.

D. $N(1; 2; -3)$.

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (m; -2; m+1)$ và $\vec{v} = (3; -2m-4; 6)$. Tìm tất cả các giá trị của m để hai vectơ $\vec{u}; \vec{v}$ cùng phương.

A. $m = 0$.

B. $m = 2$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$.

- Câu 9:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; -2; 3)$, $B(1; 0; -1)$. Gọi M là trung điểm đoạn AB . Khẳng định nào sau đây là đúng?
A. $\overrightarrow{BA} = (-1; -2; -4)$. **B.** $AB = \sqrt{21}$. **C.** $M(1; -1; 1)$. **D.** $\overrightarrow{AB} = (-1; -2; 4)$.
- Câu 10:** Trong không gian tọa độ $Oxyz$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị của các trục Ox, Oy, Oz . Biểu thức $\vec{i} \cdot \vec{j} + \vec{k} \cdot \vec{j} - \vec{i} \cdot \vec{k}$ nhận giá trị nào sau đây?
A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.
- Câu 11:** Câu nào sau đây sai?
A. $\vec{a} = -3\vec{i} + \vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k} \Leftrightarrow \vec{a} = \left(-3; 1; \frac{1}{2}\right)$. **B.** $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j} \Leftrightarrow \vec{a} = \left(\frac{1}{2}; 0; -5\right)$.
C. $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} \Leftrightarrow \vec{a} = (2; -3; 0)$. **D.** $\vec{a} = \frac{2}{5}\vec{j} + \vec{k} - 3\vec{i} \Leftrightarrow \vec{a} = \left(-3; \frac{2}{5}; 1\right)$
- Câu 12:** Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.
A. $\vec{u} = (1; 2; -1)$. **B.** $\vec{u} = (-1; 2; 1)$. **C.** $\vec{u} = (2; 1; -1)$. **D.** $\vec{u} = (-1; 1; 2)$.
- Câu 13:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; -3)$. Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua trục Oy .
A. $M'(-2; -1; -3)$. **B.** $M'(-2; -1; 3)$. **C.** $M'(2; -1; 3)$. **D.** $M'(2; 1; -3)$.
- Câu 14:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $A(1; 2; 0)$; $B(3; -1; 1)$ và $C(1; 1; 1)$. Tính tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
A. $G\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **B.** $G\left(-\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **C.** $G\left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **D.** $G\left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.
- Câu 15:** Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.
A. $\vec{u} = (1; 2; -1)$. **B.** $\vec{u} = (-1; 2; 1)$. **C.** $\vec{u} = (2; 1; -1)$. **D.** $\vec{u} = (-1; 1; 2)$.
- Câu 16:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; -3)$. Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua trục Oy .
A. $M'(-2; -1; -3)$. **B.** $M'(-2; -1; 3)$. **C.** $M'(2; -1; 3)$. **D.** $M'(2; 1; -3)$.
- Câu 17:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $A(1; 2; 0)$; $B(3; -1; 1)$ và $C(1; 1; 1)$. Tính tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
A. $G\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **B.** $G\left(-\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **C.** $G\left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **D.** $G\left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.
- Câu 18:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OM} = (1; 5; 2)$, $\overrightarrow{ON} = (3; 7; -4)$. Gọi P là điểm đối xứng với M qua N . Tìm tọa độ điểm P .
A. $P(5; 9; -10)$. **B.** $P(7; 9; -10)$. **C.** $P(5; 9; -3)$. **D.** $P(2; 6; -1)$.
- Câu 19:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (-1; 3; -2)$ và $\vec{v} = (2; 5; -1)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$

A. $\vec{a} = (-8; 9; -1)$. B. $\vec{a} = (-8; -9; 1)$. C. $\vec{a} = (8; -9; -1)$. D. $\vec{a} = (-8; -9; -1)$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 1; 2), B(6; -3; -2)$. Tìm tọa độ trung điểm E của đoạn thẳng AB .

A. $E(2; -1; 0)$. B. $E(2; 1; 0)$. C. $E(-2; 1; 0)$. D. $E(4; -2; -2)$.

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{OA} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 7\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm A .

A. $A(-2; -3; 7)$. B. $A(2; -3; -7)$. C. $A(2; 3; 7)$. D. $A(2; -3; 7)$.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, cho hai điểm A, B thỏa mãn $\vec{OA} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ và $\vec{OB} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$. Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn AB .

A. $M\left(-\frac{1}{2}; 1; -2\right)$. B. $M\left(\frac{3}{2}; 0; -1\right)$. C. $M(3; 0; -2)$. D. $M\left(\frac{1}{2}; -1; 2\right)$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; -3; 2), B(0; 1; -1), G(2; -1; 1)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho tam giác ABC nhận G là trọng tâm.

A. $C\left(1; -1; \frac{2}{3}\right)$. B. $C(3; -3; 2)$. C. $C(5; -1; 2)$. D. $C(1; 1; 0)$.

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$, trên trục Oz lấy điểm M sao cho $AM = \sqrt{5}$. Tọa độ của điểm M là

A. $M(0; 0; 3)$. B. $M(0; 0; 2)$. C. $M(0; 0; -3)$. D. $M(0; 3; 0)$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(1; 0; 1), B'(2; 1; 2), D'(1; -1; 1), C(4; 5; -5)$. Gọi tọa độ của đỉnh $A'(a; b; c)$. Khi đó $2a + b + c$ bằng

A. 3. B. 7. C. 2. D. 8.

Câu 26: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $I(-5; 0; 5)$ là trung điểm của đoạn MN , biết $M(1; -4; 7)$. Tìm tọa độ của điểm N .

A. $N(-10; 4; 3)$. B. $N(-2; -2; 6)$. C. $N(-11; -4; 3)$. D. $N(-11; 4; 3)$.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(0; 1; 2), N(7; 3; 2), P(-5; -3; 2)$. Tìm tọa độ điểm Q thỏa mãn $\vec{MN} = \vec{QP}$.

A. $Q(12; 5; 2)$. B. $Q(-12; 5; 2)$. C. $Q(-12; -5; 2)$. D. $Q(-2; -1; 2)$.

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 2; -1), B(3; 0; 3)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho $G(2; 2; 2)$ là trọng tâm tam giác ABC .

A. $C(2; 4; 4)$. B. $C(0; 2; 2)$. C. $C(8; 10; 10)$. D. $C(-2; -4; -4)$.

Câu 29: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết tọa độ các đỉnh $A(-3; 2; 1), C(4; 2; 0), B'(-2; 1; 1), D'(3; 5; 4)$. Tìm tọa độ điểm A' của hình hộp.

A. $A'(-3; 3; 1)$. B. $A'(-3; -3; 3)$. C. $A'(-3; -3; -3)$. D. $A'(-3; 3; 3)$.

- Câu 30:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;2;-1), B(5;4;3)$. Kí hiệu điểm M thuộc tia đối của tia BA sao cho $\frac{AM}{MB} = 2$. Tọa độ của điểm M là
- A. $\left(\frac{13}{3}; \frac{10}{3}; \frac{5}{3}\right)$. B. $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{11}{3}\right)$. C. $(7;6;7)$. D. $(13;11;5)$.
- Câu 31:** Cho ba vectơ không đồng phẳng $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-1; -3; 1)$, $\vec{c} = (2; -1; 4)$. Khi đó vectơ $\vec{d} = (-3; -4; 5)$ phân tích theo ba vectơ không đồng phẳng $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là
- A. $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$. B. $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$. C. $\vec{d} = \vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$. D. $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.
- Câu 32:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $MNPQ$ có $M(2;0;0), N(0;-3;0), P(0;0;-4)$. Tìm tọa độ điểm Q .
- A. $Q(-2;-3;-4)$. B. $Q(2;3;-4)$. C. $Q(-2;-3;4)$. D. $Q(4;4;2)$.
- Câu 33:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;1), B(1;-1;2), C(1;2;-1)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn $\vec{OM} = 2\vec{AB} - \vec{AC}$.
- A. $M(-2; 6; -4)$. B. $M(2; -6; 4)$. C. $M(-2; -6; 4)$. D. $M(5; 5; 0)$.
- Câu 34:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;-2), B(2;1;-1)$. Tìm độ dài của đoạn thẳng AB ?
- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{18}$ C. $2\sqrt{7}$ D. $\sqrt{3}$
- Câu 35:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, Cho ba vectơ $\vec{a} = (1;2;1), \vec{b} = (-3;5;2), \vec{c} = (0;4;3)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} - 3\vec{k}$ và độ dài của vectơ $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} - 3\vec{k}$?
- A. $\begin{cases} \vec{n} = (2; -1; -6) \\ |\vec{n}| = \sqrt{41} \end{cases}$ B. $\begin{cases} \vec{n} = (-2; 1; -6) \\ |\vec{n}| = \sqrt{41} \end{cases}$ C. $\begin{cases} \vec{n} = (-2; -1; 6) \\ |\vec{n}| = \sqrt{41} \end{cases}$ D. $\begin{cases} \vec{n} = (-2; -1; -6) \\ |\vec{n}| = \sqrt{41} \end{cases}$
- Câu 36:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (1;2;1), \vec{b} = (-3;5;2), \vec{c} = (0;4;3)$. Tìm độ dài của vectơ $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c} + 5\vec{j}$?
- A. $\sqrt{258}$ B. $\sqrt{825}$ C. $\sqrt{528}$ D. $\sqrt{285}$
- Câu 37:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0), B(0;2;0), C(0;0;2)$ và $D(2;2;2)$. Tìm bán kính cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$?
- A. 3 B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{2}{\sqrt{3}}$
- Câu 38:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1), B(3;0;4), C(2;1;-1)$. Độ dài đường cao hạ từ đỉnh A của ΔABC là:
- A. $\frac{5}{9}\sqrt{6}$ B. $\sqrt{\frac{33}{50}}$ C. $5\sqrt{3}$ D. $\sqrt{\frac{50}{33}}$
- Câu 39:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}(4;-2;-4), \vec{b}(6;-3;2)$ thì $\left| (2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) \right|$ có giá trị là:

A. 200 B. $\sqrt{200}$ C. 200^2 D. ± 200

Câu 40: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;0;-2)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 25$. Một đường thẳng d đi qua A , cắt mặt cầu tại hai điểm M, N . Độ dài ngắn nhất của MN là

A. 8. B. 4. C. 6. D. 10.

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(2;1;3)$; $B(0;-1;-1)$; $C(-1;-2;0)$; $D'(3;-2;1)$. Tính thể tích hình hộp.

A. 24. B. 12. C. 36. D. 18.

Câu 42: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(2;1;3)$; $B(0;-1;-1)$; $C(-1;-2;0)$; $D'(3;-2;1)$. Tính thể tích hình hộp.

A. 24. B. 12. C. 36. D. 18.

Câu 43: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;2;-2), B(3;-3;3)$. M là điểm thay đổi trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng?

A. $12\sqrt{3}$. B. $6\sqrt{3}$. C. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. D. $5\sqrt{3}$.

Câu 44: Cho tam giác ABC với $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-4;7;5)$. Độ dài phân giác trong của ΔABC kẻ từ đỉnh B là

A. $\frac{2\sqrt{74}}{5}$. B. $\frac{2\sqrt{74}}{3}$. C. $\frac{3\sqrt{73}}{3}$. D. $2\sqrt{30}$.

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;0), B(0;1;1), C(1;0;1)$. Xét điểm D thuộc mặt phẳng Oxy sao cho tứ diện $ABCD$ là một tứ diện đều. Kí hiệu $D(x_0; y_0; z_0)$ là tọa độ của điểm D . Tổng $x_0 + y_0$ bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 73. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 3x + 2$ là hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x + C.$

B. $F(x) = \frac{x^4}{3} + 3x^2 + 2x + C.$

C. $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x + C.$

D. $F(x) = 3x^2 + 3x + C.$

Hướng dẫn giải: Sử dụng bảng nguyên hàm.

Câu 74. Hàm số $F(x) = 5x^3 + 4x^2 - 7x + 120 + C$ là họ nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = 15x^2 + 8x - 7.$

B. $f(x) = 5x^2 + 4x + 7.$

C. $f(x) = \frac{5x^2}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{7x^2}{2}.$

D. $f(x) = 5x^2 + 4x - 7.$

Hướng dẫn giải: Lấy đạo hàm của hàm số $F(x)$ ta được kết quả.

Câu 75. Họ nguyên hàm của hàm số: $y = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là

A. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| + C.$

B. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \ln x + C.$

C. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + \ln x + C.$

D. $F(x) = 2x - 3 - \frac{1}{x^2} + C.$

Hướng dẫn giải: Sử dụng bảng nguyên hàm.

Câu 76. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)$

A. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C.$

B. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^2 + 2x + C.$

C. $F(x) = 2x + 3 + C.$

D. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^2 + 2x + C.$

Hướng dẫn giải: $f(x) = (x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$. Sử dụng bảng nguyên hàm.

Câu 77. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{2}{5-2x} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$ là hàm số nào?

A. $F(x) = -\ln|5-2x| + 2\ln|x| - \frac{3}{x} + C.$

B. $F(x) = -\ln|5-2x| + 2\ln|x| + \frac{3}{x} + C.$

C. $F(x) = \ln|5-2x| + 2\ln|x| - \frac{3}{x} + C.$

D. $F(x) = -\ln|5-2x| - 2\ln|x| + \frac{3}{x} + C.$

Hướng dẫn giải: Sử dụng bảng nguyên hàm.

4.1.2. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC.

Câu 78. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$

A. $\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$

B. $\int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \cos 2x + C.$

C. $\int \sin 2x dx = \cos 2x + C.$

D. $\int \sin 2x dx = -\cos 2x + C.$

Hướng dẫn giải $\int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$

Câu 79. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$

B. $\int f(x) dx = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$

$$\text{C. } \int f(x)dx = -\frac{1}{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C. \quad \text{D. } \int f(x)dx = \frac{1}{6} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$$

Hướng dẫn giải: $\int f(x)dx = \frac{1}{3} \int \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) d\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$

Câu 80. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + \tan^2 \frac{x}{2}$.

$$\text{A. } \int f(x)dx = 2 \tan \frac{x}{2} + C.$$

$$\text{B. } \int f(x)dx = \tan \frac{x}{2} + C.$$

$$\text{C. } \int f(x)dx = \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + C.$$

$$\text{D. } \int f(x)dx = -2 \tan \frac{x}{2} + C.$$

Hướng dẫn giải: $f(x) = 1 + \tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}$ nên $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 2 \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 2 \tan \frac{x}{2} + C.$

Câu 81. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$.

$$\text{A. } \int f(x)dx = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C.$$

$$\text{B. } \int f(x)dx = -\frac{1}{3} \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C.$$

$$\text{C. } \int f(x)dx = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C.$$

$$\text{D. } \int f(x)dx = \frac{1}{3} \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C.$$

Hướng dẫn giải: $\int \frac{dx}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C.$

Câu 82. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$.

$$\text{A. } \int f(x)dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

$$\text{B. } \int f(x)dx = -\frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

$$\text{C. } \int f(x)dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

$$\text{D. } \int f(x)dx = -\frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

Hướng dẫn giải: $\int \sin^3 x \cdot \cos x \cdot dx = \int \sin^3 x \cdot d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$

4.1.3. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ MŨ, LÔGARIT.

Câu 83. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - e^{-x}$.

$$\text{A. } \int f(x)dx = e^x + e^{-x} + C.$$

$$\text{B. } \int f(x)dx = -e^x + e^{-x} + C.$$

$$\text{C. } \int f(x)dx = e^x - e^{-x} + C.$$

$$\text{D. } \int f(x)dx = -e^x - e^{-x} + C.$$

Hướng dẫn giải: $\int (e^x - e^{-x})dx = e^x + e^{-x} + C.$

Câu 84. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x \cdot 3^{-2x}$.

$$\text{A. } \int f(x)dx = \left(\frac{2}{9}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 - \ln 9} + C.$$

$$\text{B. } \int f(x)dx = \left(\frac{9}{2}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 - \ln 9} + C.$$

$$\text{C. } \int f(x)dx = \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 - \ln 9} + C.$$

$$\text{D. } \int f(x)dx = \left(\frac{2}{9}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 + \ln 9} + C.$$

Hướng dẫn giải: $\int 2^x \cdot 3^{-2x} dx = \int \left(\frac{2}{9}\right)^x dx = \left(\frac{2}{9}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 - \ln 9} + C$

Câu 85. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(3 + e^{-x})$ là

A. $F(x) = 3e^x + x + C.$

B. $F(x) = 3e^x + e^x \ln e^x + C.$

C. $F(x) = 3e^x - \frac{1}{e^x} + C.$

D. $F(x) = 3e^x - x + C.$

Hướng dẫn giải: $F(x) = \int e^x(3 + e^{-x})dx = \int (3e^x + 1)dx = 3e^x + x + C$

Câu 86. Hàm số $F(x) = 7e^x - \tan x$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = e^x \left(7 - \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right).$

B. $f(x) = 7e^x + \frac{1}{\cos^2 x}.$

C. $f(x) = 7e^x + \tan^2 x - 1.$

D. $f(x) = 7 \left(e^x - \frac{1}{\cos^2 x} \right).$

Hướng dẫn giải: Ta có $g'(x) = 7e^x - \frac{1}{\cos^2 x} = e^x \left(7 - \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) = f(x)$

Câu 87. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{e^{4x-2}}.$

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}e^{2x-1} + C.$

B. $\int f(x)dx = e^{2x-1} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}e^{4x-2} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{e^{2x-1}} + C.$

Hướng dẫn giải: $\int \sqrt{e^{4x-2}}dx = \int e^{2x-1}dx = \frac{1}{2}e^{2x-1} + C.$

4.1.4. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ CHỨA CĂN THỨC.

Câu 88. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ là

A. $\int f(x)dx = \sqrt{2x-1} + C.$

B. $\int f(x)dx = 2\sqrt{2x-1} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{\sqrt{2x-1}}{2} + C.$

D. $\int f(x)dx = -2\sqrt{2x-1} + C.$

Hướng dẫn giải: $\int \frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x-1)}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2x-1} + C.$

Câu 89. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}.$

A. $\int f(x)dx = -2\sqrt{3-x} + C.$

B. $\int f(x)dx = -\sqrt{3-x} + C.$

C. $\int f(x)dx = 2\sqrt{3-x} + C.$

D. $\int f(x)dx = -3\sqrt{3-x} + C.$

Hướng dẫn giải: $\int \frac{1}{\sqrt{3-x}}dx = -\int \frac{d(3-x)}{\sqrt{3-x}} = -2\sqrt{3-x} + C.$

Câu 90. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+1}.$

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

C. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x+1} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$

Hướng dẫn giải: Đặt $t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow dx = tdt$

$\Rightarrow \int \sqrt{2x+1}dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

Câu 91. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{5-3x}.$

A. $\int f(x)dx = -\frac{2}{9}(5-3x)\sqrt{5-3x} + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{2}{3}(5-3x)\sqrt{5-3x}.$

$$C. \int f(x) dx = \frac{2}{9}(5-3x)\sqrt{5-3x}.$$

$$D. \int f(x) dx = -\frac{2}{3}\sqrt{5-3x} + C.$$

Hướng dẫn giải: Đặt $t = \sqrt{5-3x} \Rightarrow dx = -\frac{2tdt}{3}$

$$\int \sqrt{5-3x} dx = -\frac{2}{9}(5-3x)\sqrt{5-3x} + C.$$

Câu 92. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$.

$$A. \int f(x) dx = \frac{3}{4}(x-2)\sqrt[3]{x-2} + C.$$

$$B. \int f(x) dx = -\frac{3}{4}(x-2)\sqrt[3]{x-2} + C.$$

$$C. \int f(x) dx = \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x-2}.$$

$$D. \int f(x) dx = \frac{1}{3}(x-2)^{\frac{2}{3}} + C.$$

Hướng dẫn giải: Đặt $t = \sqrt[3]{x-2} \Rightarrow dx = 3t^2 dt$. Khi đó $\int \sqrt[3]{x-2} dx = \frac{3}{4}(x-2)\sqrt[3]{x-2} + C$

Câu 93. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{1-3x}$.

$$A. \int f(x) dx = -\frac{1}{4}(1-3x)\sqrt[3]{1-3x} + C.$$

$$B. \int f(x) dx = -\frac{3}{4}(1-3x)\sqrt[3]{1-3x} + C.$$

$$C. \int f(x) dx = \frac{1}{4}(1-3x)\sqrt[3]{1-3x} + C.$$

$$D. \int f(x) dx = -(1-3x)^{\frac{2}{3}} + C.$$

Hướng dẫn giải: Đặt $t = \sqrt[3]{1-3x} \Rightarrow dx = -t^2 dt$. Khi đó $\int \sqrt[3]{1-3x} dx = -\frac{1}{4}(1-3x)\sqrt[3]{1-3x} + C$

Câu 94. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{e^{3x}}$.

$$A. \int f(x) dx = \frac{2\sqrt{e^{3x}}}{3} + C$$

$$B. \int f(x) dx = \frac{3}{2\sqrt{e^{3x}}} + C$$

$$C. \int f(x) dx = \frac{3\sqrt{e^{3x}}}{2} + C$$

$$D. \int f(x) dx = \frac{2e^{\frac{3x+2}{2}}}{3x+2} + C$$

Hướng dẫn giải: $\int \sqrt{e^{3x}} dx = \frac{2}{3} \int e^{\frac{3x}{2}} \cdot d\left(\frac{3x}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot e^{\frac{3x}{2}} + C = \frac{2\sqrt{e^{3x}}}{3} + C$

Câu 95. Hàm số $F(x) = (x+1)^2 \sqrt{x+1} + 2016$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

$$A. f(x) = \frac{5}{2}(x+1)\sqrt{x+1}$$

$$B. f(x) = \frac{5}{2}(x+1)\sqrt{x+1} + C$$

$$C. f(x) = \frac{2}{5}(x+1)\sqrt{x+1}$$

$$D. f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} + C$$

Hướng dẫn giải: $F'(x) = \frac{5}{2}(x+1)\sqrt{x+1}$

Câu 96. Biết một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-3x}} + 1$ là hàm số $F(x)$ thỏa mãn $F(-1) = \frac{2}{3}$.

Khi đó $F(x)$ là hàm số nào sau đây?

$$A. F(x) = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + 3$$

$$B. F(x) = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} - 3$$

$$C. F(x) = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + 1$$

$$D. F(x) = 4 - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x}$$

Hướng dẫn giải

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-3x}} + 1 \right) dx = -\frac{1}{3} \int \frac{d(1-3x)}{\sqrt{1-3x}} + x = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + C$$

$$F(-1) = \frac{2}{3} \Rightarrow C = 3 \Rightarrow F(x) = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + 3$$

Câu 97. Biết $F(x) = 6\sqrt{1-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{a}{\sqrt{1-x}}$. Khi đó giá trị của a bằng

- A. -3. B. 3. C. 6. D. $\frac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải: $F'(x) = (6\sqrt{1-x})' = \frac{-3}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow a = -3$

4.1.5. PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Câu 98. Tính $F(x) = \int x \sin x dx$ bằng

- A. $F(x) = \sin x - x \cos x + C$. B. $F(x) = x \sin x - \cos x + C$.
 C. $F(x) = \sin x + x \cos x + C$. D. $F(x) = x \sin x + \cos x + C$.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần

Phương pháp trắc nghiệm:

Dùng định nghĩa, sử dụng máy tính nhập $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$, CALC ngẫu nhiên tại một số điểm x_0 thuộc tập xác định, kết quả xấp xỉ bằng 0 chọn.

Câu 99. Tính $\int x \ln^2 x dx$. Chọn kết quả đúng:

- A. $\frac{1}{4}x^2(2\ln^2 x - 2\ln x + 1) + C$. B. $\frac{1}{2}x^2(2\ln^2 x - 2\ln x + 1) + C$.
 C. $\frac{1}{4}x^2(2\ln^2 x + 2\ln x + 1) + C$. D. $\frac{1}{2}x^2(2\ln^2 x + 2\ln x + 1) + C$.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần 2 lần.

Phương pháp trắc nghiệm

Sử dụng định nghĩa $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) - f(x) = 0$.

Nhập máy tính $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$. CALC x tại một số giá trị ngẫu nhiên x_0 trong tập xác định, nếu kết quả xấp xỉ bằng 0 thì chọn.

Câu 100. Tính $F(x) = \int x \sin x \cos x dx$. Chọn kết quả đúng:

- A. $F(x) = \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x + C$. B. $F(x) = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{x}{2} \sin 2x + C$.
 C. $F(x) = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{8} \cos 2x + C$. D. $F(x) = \frac{-1}{4} \sin 2x - \frac{x}{8} \cos 2x + C$.

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Biến đổi $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ rồi sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần.

Phương pháp trắc nghiệm:

Cách 1: Sử dụng định nghĩa $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) - f(x) = 0$

Nhập máy tính $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$. CALC x tại một số giá trị ngẫu nhiên x_0 trong tập xác định, nếu kết quả xấp xỉ bằng 0 thì chọn.

Câu 101. Tính $F(x) = \int x e^{\frac{x}{3}} dx$. Chọn kết quả đúng

- A. $F(x) = 3(x-3)e^{\frac{x}{3}} + C$ B. $F(x) = (x+3)e^{\frac{x}{3}} + C$

$$\text{C. } F(x) = \frac{x-3}{3} e^{\frac{x}{3}} + C$$

$$\text{D. } F(x) = \frac{x+3}{3} e^{\frac{x}{3}} + C$$

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần với $u = x, dv = e^{\frac{x}{3}} dx$.

Phương pháp trắc nghiệm:

Cách 1: Sử dụng định nghĩa $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) - f(x) = 0$.

Nhập máy tính $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$. CALC x tại một số giá trị ngẫu nhiên x_0 trong tập xác định, nếu kết quả xấp xỉ bằng 0 thì chọn.

Cách 2: Sử dụng phương pháp bảng.

Câu 102. Tính $F(x) = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$. Chọn kết quả đúng

$$\text{A. } F(x) = x \tan x + \ln |\cos x| + C.$$

$$\text{B. } F(x) = -x \cot x + \ln |\cos x| + C.$$

$$\text{C. } F(x) = -x \tan x + \ln |\cos x| + C.$$

$$\text{D. } F(x) = -x \cot x - \ln |\cos x| + C.$$

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần với $u = x, dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx$

Phương pháp trắc nghiệm:

Cách 1: Sử dụng định nghĩa $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) - f(x) = 0$.

Nhập máy tính $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$. CALC x tại một số giá trị ngẫu nhiên x_0 trong tập xác định, nếu kết quả xấp xỉ bằng 0 thì chọn.

Cách 2: Sử dụng phương pháp bảng.

Câu 103. Tính $F(x) = \int x^2 \cos x dx$. Chọn kết quả đúng

$$\text{A. } F(x) = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C.$$

$$\text{B. } F(x) = 2x^2 \sin x - x \cos x + \sin x + C.$$

$$\text{C. } F(x) = x^2 \sin x - 2x \cos x + 2 \sin x + C.$$

$$\text{D. } F(x) = (2x + x^2) \cos x - x \sin x + C.$$

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần 2 lần với $u = x^2; dv = \cos x dx$, sau đó $u_1 = x; dv_1 = \sin x dx$.

Phương pháp trắc nghiệm:

Cách 1: Sử dụng định nghĩa $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) - f(x) = 0$

Nhập máy tính $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$. CALC x tại một số giá trị ngẫu nhiên x_0 trong tập xác định, nếu kết quả xấp xỉ bằng 0 thì chọn.

Cách 2: Sử dụng phương pháp bảng.

Câu 104. Tính $F(x) = \int x \sin 2x dx$. Chọn kết quả đúng

$$\text{A. } F(x) = -\frac{1}{4}(2x \cos 2x - \sin 2x) + C.$$

$$\text{B. } F(x) = \frac{1}{4}(2x \cos 2x - \sin 2x) + C.$$

$$\text{C. } F(x) = -\frac{1}{4}(2x \cos 2x + \sin 2x) + C.$$

$$\text{D. } F(x) = \frac{1}{4}(2x \cos 2x + \sin 2x) + C.$$

Hướng dẫn giải: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần với $u = x; dv = \sin 2x dx$

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng phương pháp bảng hoặc sử dụng máy tính: Nhập $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$, CALC ngẫu nhiên tại một số điểm x_0 bất kỳ, nếu kết quả xấp xỉ bằng 0 thì chọn đáp án đó.

Câu 105. Hàm số $F(x) = x \sin x + \cos x + 2017$ là một nguyên hàm của hàm số nào?

$$\text{A. } f(x) = x \cos x.$$

$$\text{B. } f(x) = x \sin x.$$

$$\text{C. } f(x) = -x \cos x.$$

$$\text{D. } f(x) = -x \sin x.$$

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Tính $F'(x)$ có kết quả trùng với đáp án chọn.

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng định nghĩa $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) - f(x) = 0$

Nhập máy tính $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$. CALC x tại một số giá trị ngẫu nhiên x_0 trong tập xác định, nếu kết quả xấp xỉ bằng 0 chọn.

Câu 106. Tính $\int \frac{1 + \ln(x+1)}{x^2} dx$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\frac{-1 + \ln(x+1)}{x} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$

B. $-\frac{1 + \ln(x+1)}{x} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$

C. $-\frac{x+1}{x}(1 + \ln(x+1)) + \ln|x| + C$

D. $-\frac{1 + \ln(x+1)}{x} - \ln|x+1| + \ln|x| + C$

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần với $u = 1 + \ln(x+1); dv = -\frac{1}{x^2} dx$ hoặc biến đổi rồi đặt $u = \ln(x+1); dv = -\frac{1}{x^2} dx$.

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng máy tính kiểm tra bằng định nghĩa.

4.1.6. ÔN TẬP

Câu 107. Hãy chọn mệnh đề đúng

A. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (0 < a \neq 1)$.

B. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

C. $\int f(x) \cdot g(x) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$.

D. $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx}$.

Hướng dẫn giải: A đúng. B sai vì thiếu điều kiện $\alpha \neq -1$; C, D sai vì không có tính chất.

Câu 108. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int \sin x dx = \cos x + C$.

B. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, x \neq 0$.

D. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (0 < a \neq 1)$.

C. $\int e^x dx = e^x + C$.

Hướng dẫn giải: $\int \sin x dx = -\cos x + C$

Câu 109. Hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + 3 + \frac{1}{x}$ có nguyên hàm là

A. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 3x + \ln|x| + C$.

B. $F(x) = x^4 - \frac{x^3}{3} + 3x + \ln|x| + C$.

C. $F(x) = 3x^2 - 2x - \frac{1}{x^2} + C$.

D. $F(x) = x^4 - x^3 + 3x + \ln|x| + C$.

Hướng dẫn giải: $F(x) = \int (x^3 - x^2 + 3 + \frac{1}{x}) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 3x + \ln|x| + C$

Câu 110. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 x$ là

A. $F(x) = \tan x - x + C$.

B. $F(x) = -\tan x + x + C$.

C. $F(x) = \tan x + x + C$.

D. $F(x) = -\tan x - x + C$.

Hướng dẫn giải: $\int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + C$

Câu 111. Hàm số $F(x) = 7 \sin x - \cos x + 1$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = \sin x + 7 \cos x$.

B. $f(x) = -\sin x + 7 \cos x$.

C. $f(x) = \sin x - 7 \cos x$.

D. $f(x) = -\sin x - 7 \cos x$.

Hướng dẫn giải: $F'(x) = 7 \cos x + \sin x$

Câu 112. Kết quả tính $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ là

A. $\tan x - \cot x + C$.

B. $\cot 2x + C$.

C. $\tan 2x - x + C$.

D. $-\tan x + \cot x + C$.

Hướng dẫn giải: $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \tan x - \cot x + C$

Câu 113. Hàm số $F(x) = 3x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} - 1$ có một nguyên hàm là

A. $f(x) = x^3 - 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} - x$.

B. $f(x) = x^3 - \sqrt{x} - \frac{1}{x} - x$.

C. $f(x) = x^3 - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

D. $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x} - x$.

Hướng dẫn giải: Ta có $\int F(x) dx = \int \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} - 1 \right) dx = x^3 - 2\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} - x + C$

Câu 114. Hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^5 x}$ có một nguyên hàm $F(x)$ bằng

A. $-\frac{1}{4\sin^4 x}$.

B. $\frac{1}{4\sin^4 x}$.

C. $\frac{4}{\sin^4 x}$.

D. $\frac{-4}{\sin^4 x}$.

Hướng dẫn giải: $\int f(x) dx = \int \frac{\cos x}{\sin^5 x} dx = \int \frac{1}{\sin^5 x} d(\sin x) = -\frac{1}{4\sin^4 x} + C$

Câu 115. Kết quả tính $\int 2x\sqrt{5-4x^2} dx$ bằng

A. $-\frac{1}{6}\sqrt{(5-4x^2)^3} + C$.

B. $-\frac{3}{8}\sqrt{(5-4x^2)} + C$.

C. $\frac{1}{6}\sqrt{(5-4x^2)^3} + C$.

D. $-\frac{1}{12}\sqrt{(5-4x^2)^3} + C$.

Hướng dẫn giải: Đặt $t = \sqrt{5-4x^2} \Rightarrow t dt = -4x dx$

Ta có $\int 2x\sqrt{5-4x^2} dx = -\frac{1}{2} \int t^2 dt = -\frac{1}{6} t^3 + C = -\frac{1}{6} \sqrt{(5-4x^2)^3} + C$

Câu 116. Kết quả $\int e^{\sin x} \cos x dx$ bằng

A. $e^{\sin x} + C$.

B. $\cos x \cdot e^{\sin x} + C$.

C. $e^{\cos x} + C$.

D. $e^{-\sin x} + C$.

Hướng dẫn giải: Ta có $\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C$

Câu 117. Tính $\int \tan x dx$ bằng

A. $-\ln|\cos x| + C$.

B. $\ln|\cos x| + C$.

C. $\frac{1}{\cos^2 x} + C$.

D. $\frac{-1}{\cos^2 x} + C$.

Hướng dẫn giải: Ta có $\int \tan x dx = -\int \frac{1}{\cos x} d(\cos x) = -\ln|\cos x| + C$

Câu 118. Tính $\int \cot x dx$ bằng

A. $\ln|\sin x| + C$.

B. $-\ln|\sin x| + C$.

C. $\frac{-1}{\sin^2 x} + C$.

D. $\frac{1}{\sin^2 x} - C$.

Hướng dẫn giải: Ta có $\int \cot x dx = \int \frac{1}{\sin x} d(\sin x) = \ln|\sin x| + C$

Câu 119. Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{x^3}{x-1}$ là

A. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| + C.$

B. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x+1| + C.$

C. $\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| + C.$

D. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x + \ln|x-1| + C.$

Hướng dẫn giải: Ta có $\frac{x^3}{x-1} = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}$. Sử dụng bảng nguyên hàm suy ra đáp án.

Câu 120. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x+1}$ là

A. $\frac{x^2}{2} - 3x + 6\ln|x+1|.$

B. $\frac{x^2}{2} + 3x + 6\ln|x+1|.$

C. $\frac{x^2}{2} + 3x - 6\ln|x+1|.$

D. $\frac{x^2}{2} - 3x + 6\ln(x+1).$

Hướng dẫn giải: $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x+1} = x - 3 + \frac{6}{x+1}$. Sử dụng bảng nguyên hàm.

Câu 121. Kết quả tính $\int \frac{1}{x(x+3)} dx$ bằng

A. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C.$

B. $-\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C.$

C. $\frac{2}{3} \ln \left| \frac{x+3}{x} \right| + C.$

D. $\frac{2}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C.$

Hướng dẫn giải: $\frac{1}{x(x+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} \right)$. Sử dụng bảng nguyên hàm.

Câu 122. Kết quả tính $\int \frac{1}{x(x-3)} dx$ bằng

A. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-3}{x} \right| + C.$

B. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+3}{x} \right| + C.$

C. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C.$

D. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x-3} \right| + C.$

Hướng dẫn giải: $\frac{1}{x(x+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x} \right)$. Sử dụng bảng nguyên hàm.

Câu 123. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$ là

A. $F(x) = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C.$

B. $F(x) = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+2}{x-1} \right| + C.$

C. $F(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C.$

D. $F(x) = \ln|x^2 + x - 2| + C.$

Hướng dẫn giải: $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right)$. Sử dụng bảng nguyên hàm.

Câu 124. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \left(\frac{1-x}{x} \right)^2$ là

A. $F(x) = -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C.$

B. $F(x) = -\frac{1}{x} - 2\ln x + x + C.$

C. $F(x) = \frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C.$

D. $F(x) = -\frac{1}{x} - 2\ln|x| - x + C.$

Hướng dẫn giải: $f(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 = \frac{1-2x+x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1$. Sử dụng bảng nguyên hàm.

Câu 125. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}$ với $a \neq 0$ là

A. $\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$.

B. $\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C$.

C. $\frac{1}{a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$.

D. $\frac{1}{a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C$.

Hướng dẫn giải: $\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right)$. Sử dụng bảng nguyên hàm.

Câu 126. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$ thỏa mãn $F(2) = 0$. Khi đó phương trình $F(x) = x$ có nghiệm là

A. $x = 1 - \sqrt{3}$.

B. $x = 1$.

C. $x = -1$.

D. $x = 0$.

Hướng dẫn giải: Đặt $t = \sqrt{8-x^2} \Rightarrow t^2 = 8-x^2 \Rightarrow -tdt = xdx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{8-x^2}} dx = -\int \frac{tdt}{t} = -t + C = -\sqrt{8-x^2} + C.$$

Vì $F(2) = 0$ nên $C = 2$. Ta có phương trình $-\sqrt{8-x^2} + 2 = x \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{3}$

Câu 127. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$ thì $F(3)$ bằng

A. $\ln 2 + 1$.

B. $\ln \frac{3}{2}$.

C. $\ln 2$.

D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải: $\int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C$, vì $F(2) = 1$ nên $C = 1$. $F(x) = \ln|x-1| + 1$, thay $x = 3$ ta có đáp án.

Câu 128. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\ln^2 x + 1} \cdot \frac{\ln x}{x}$ thỏa mãn $F(1) = \frac{1}{3}$. Giá trị của $F^2(e)$ là

A. $\frac{8}{9}$.

B. $\frac{1}{9}$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải: Đặt $t = \sqrt{\ln^2 x + 1} \Rightarrow tdt = \frac{\ln x}{x} dx$

$$\int \sqrt{\ln^2 x + 1} \cdot \frac{\ln x}{x} dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(\sqrt{\ln^2 x + 1})^3}{3} + C. \text{ Vì } F(1) = \frac{1}{3} \text{ nên } C = 0$$

Vậy $F^2(e) = \frac{8}{9}$.

Câu 129. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{\sin^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ là

A. $-\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$.

B. $\cot x - x^2 + \frac{\pi^2}{16}$.

C. $-\cot x + x^2$.

D. $\cot x - x^2 - \frac{\pi^2}{16}$.

Hướng dẫn giải: $\int \left(2x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = x^2 - \cot x + C$. $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ nên $C = -\frac{\pi^2}{16}$.

4.1.2. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC.

Câu 130. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^2 x \cdot \sin x$.

A. $\int f(x)dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{\cos^3 x}{3} + C.$

C. $\int f(x)dx = -\frac{\sin^2 x}{2} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$

Hướng dẫn giải: $\int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d(\cos x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$

Câu 131. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x - 1}$.

A. $\int f(x)dx = -\ln|\sin x| + C.$

B. $\int f(x)dx = \ln|\cos 2x - 1| + C.$

C. $\int f(x)dx = \ln|\sin 2x| + C.$

D. $\int f(x)dx = \ln|\sin x| + C.$

Hướng dẫn giải

$$\int \frac{\sin 2x dx}{\cos 2x - 1} = \int \frac{2 \sin x \cos x}{1 - 2 \sin^2 x + 1} dx = -\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = -\int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -\ln|\sin x| + C$$

Câu 132. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x \cdot \cos 2x \cdot dx$.

A. $\int f(x)dx = \frac{-2 \cos^3 x}{3} + \cos x + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{6} \cos 3x + \frac{1}{2} \sin x + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{\cos^3 x}{3} + \cos x + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{2} \sin x + C.$

Hướng dẫn giải

$$\int \sin x \cdot \cos 2x dx = \int (2 \cos^2 x - 1) \sin x dx = -\int (2 \cos^2 x - 1) d(\cos x) = \frac{-2 \cos^3 x}{3} + \cos x + C$$

Câu 133. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x \cdot \cos 3x$.

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \cos 4x + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 4x + C.$

C. $\int f(x)dx = 2 \cos^4 x + 3 \cos^2 x + C.$

D. $\int f(x)dx = 3 \cos^4 x - 3 \cos^2 x + C.$

Hướng dẫn giải: $\int 2 \sin x \cdot \cos 3x dx = \int (\sin 4x - \sin 2x) dx = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \cos 4x + C.$

Câu 134. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \sin 3x$.

A. $\int f(x)dx = \frac{3}{8} \left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{4} \right) - \frac{1}{8} \left(x - \frac{\sin 6x}{6} \right) + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{3}{8} \left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{4} \right) + \frac{1}{8} \left(x - \frac{\sin 6x}{6} \right) + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{8} \left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{4} \right) - \frac{3}{8} \left(x - \frac{\sin 6x}{6} \right) + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{3}{8} \left(\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{4} \right) - \frac{1}{8} \left(x + \frac{\sin 6x}{6} \right) + C.$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cdot \sin 3x dx &= \int \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4} \cdot \sin 3x dx \\ &= \frac{3}{8} \int 2 \sin x \cdot \sin 3x dx - \frac{1}{8} \int 2 \sin^2 3x dx = \frac{3}{8} \int (\cos 2x - \cos 4x) dx - \frac{1}{8} \int (1 - \cos 6x) dx \\ &= \frac{3}{8} \left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{4} \right) - \frac{1}{8} \left(x - \frac{\sin 6x}{6} \right) + C \end{aligned}$$

Câu 135. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos 3x + \cos^3 x \cdot \sin 3x$.

$$\text{A. } \int f(x)dx = \frac{-3}{16} \cos 4x + C.$$

$$\text{B. } \int f(x)dx = \frac{3}{16} \cos 4x + C.$$

$$\text{C. } \int f(x)dx = \frac{-3}{16} \sin 4x + C.$$

$$\text{D. } \int f(x)dx = \frac{3}{16} \sin 4x + C.$$

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \int (\sin^3 x \cdot \cos 3x + \cos^3 x \cdot \sin 3x) dx &= \int \left(\frac{3 \sin x - \sin 3x}{4} \cdot \cos 3x + \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4} \cdot \sin 3x \right) dx \\ &= \int \left(\frac{3}{4} \sin x \cdot \cos 3x - \sin 3x \cdot \cos 3x + \frac{3}{4} \sin 3x \cdot \cos x + \sin 3x \cdot \cos 3x \right) dx \\ &= \frac{3}{4} \int (\sin x \cdot \cos 3x + \sin 3x \cdot \cos x) dx = \frac{3}{4} \int \sin 4x dx = \frac{-3}{16} \cos 4x + C \end{aligned}$$

Câu 136. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$ biết $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{A. } F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} + \frac{1}{2}.$$

$$\text{B. } F(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \frac{3}{2}.$$

$$\text{C. } F(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \frac{1}{2}.$$

$$\text{D. } F(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \frac{5}{2}.$$

Hướng dẫn giải

$$\bullet F(x) = \int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos x) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x + C$$

$$\bullet F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} + C = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$$

4.1.3. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT.

Câu 137. Hàm số $f(x) = e^x \left(\ln 2 + \frac{e^{-x}}{\sin^2 x} \right)$ có họ nguyên hàm là

$$\text{A. } F(x) = e^x \ln 2 - \cot x + C.$$

$$\text{B. } F(x) = e^x \ln 2 + \cot x + C.$$

$$\text{C. } F(x) = e^x \ln 2 + \frac{1}{\cos^2 x} + C.$$

$$\text{D. } F(x) = e^x \ln 2 - \frac{1}{\cos^2 x} + C.$$

Hướng dẫn giải: $\int f(x)dx = \int \left(e^x \ln 2 + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = e^x \ln 2 - \cot x + C$

Câu 138. Hàm số $f(x) = 3^x - 2^x \cdot 3^x$ có nguyên hàm bằng

$$\text{A. } \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{6^x}{\ln 6} + C.$$

$$\text{B. } 3^x \ln 3(1 + 2^x \ln 2) + C.$$

$$\text{C. } \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{3^x \cdot 2^x}{\ln 6} + C.$$

$$\text{D. } \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{6^x}{\ln 3 \cdot \ln 2} + C.$$

Hướng dẫn giải: $\int f(x)dx = \int (3^x + 6^x) dx = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{6^x}{\ln 6} + C$

Câu 139. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = (e^{-x} + e^x)^2$ thỏa mãn điều kiện $F(0) = 1$ là

$$\text{A. } F(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} e^{2x} + 2x + 1.$$

$$\text{B. } F(x) = -2e^{-2x} + 2e^{2x} + 2x + 1.$$

$$\text{C. } F(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} e^{2x} + 2x.$$

$$\text{D. } F(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} e^{2x} + 2x - 1.$$

Hướng dẫn giải: Ta có $F(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} e^{2x} + 2x + C, F(0) = 1 \Leftrightarrow C = 1$

Câu 140. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.

$$\text{A. } F(x) = 2x - 3 \ln|x+1| + C.$$

$$\text{B. } F(x) = 2x + 3 \ln|x+1| + C.$$

C. $F(x) = 2x - \ln|x+1| + C.$

D. $F(x) = 2x + \ln|x+1| + C.$

Hướng dẫn giải: $\int \frac{2x-1}{x+1} dx = \int \left(2 - \frac{3}{x+1} \right) dx = 2x - 3\ln|x+1| + C$

Câu 141. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x^2 + 2x + 3}{2x+1}.$

A. $F(x) = \frac{1}{8}(2x+1)^2 + \frac{5}{4}\ln|2x+1| + C.$

B. $F(x) = \frac{1}{8}(2x+1)^2 + 5\ln|2x+1| + C.$

C. $F(x) = (2x+1)^2 + \ln|2x+1| + C.$

D. $F(x) = (2x+1)^2 - \ln|2x+1| + C.$

Hướng dẫn giải:

$\int \frac{2x^2 + 2x + 3}{2x+1} dx = \int \left(\frac{2x+1}{2} + \frac{5}{2(2x+1)} \right) dx = \frac{1}{8}(2x+1)^2 + \frac{5}{4}\ln|2x+1| + C$

Câu 142. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}.$

A. $F(x) = \frac{x^2}{2} - \ln(x^2 + 1) + C.$

B. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln(x^2 + 1) + C.$

C. $F(x) = x^2 - \ln(x^2 + 1) + C.$

D. $F(x) = x^2 + \ln(x^2 + 1) + C.$

Hướng dẫn giải: $\int \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} dx = \int \left(x - \frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{x^2}{2} - \ln(x^2 + 1) + C$

Câu 143. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x \ln x + x}.$

A. $F(x) = \ln|\ln x + 1| + C.$

B. $F(x) = \ln|\ln x - 1| + C.$

C. $F(x) = \ln|x+1| + C.$

D. $F(x) = \ln x + 1 + C.$

Hướng dẫn giải: $\int \frac{1}{x(\ln x + 1)} dx = \int \frac{d(\ln x + 1)}{(\ln x + 1)} = \ln|\ln x + 1| + C$

Câu 144. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}.$

A. $F(x) = e^x - \ln(e^x + 1) + C.$

B. $F(x) = e^x + \ln(e^x + 1) + C.$

C. $F(x) = \ln(e^x + 1) + C.$

D. $F(x) = e^{2x} - e^x + C.$

Hướng dẫn giải: $\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = \int \left(e^x - \frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx = e^x - \int \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = e^x - \ln(e^x + 1) + C$

CHỦ ĐỀ 2. TÍCH PHÂN

E. KIẾN THỨC CƠ BẢN

3. Định nghĩa

Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử F là một nguyên hàm của f trên $[a; b]$. Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a; b]$) của hàm số

$f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x) dx.$

Ta dùng kí hiệu $F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ để chỉ hiệu số $F(b) - F(a)$. Vậy $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.

Nhận xét: Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)dx$ hay $\int_a^b f(t)dt$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

Ý nghĩa hình học của tích phân: Nếu hàm số f liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Vậy $S = \int_a^b f(x)dx$.

4. Tính chất của tích phân

$$1. \int_a^a f(x)dx = 0 \qquad 2. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$3. \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \quad (a < b < c) \quad 4. \int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$5. \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

F. KỸ NĂNG CƠ BẢN

2. Một số phương pháp tính tích phân

V. Dạng 1: Tính tích phân theo công thức

Ví dụ 1: Tính các tích phân sau:

$$b) I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^3}, \quad b) I = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx, \quad c) I = \int_0^1 \frac{2x+9}{x+3} dx, \quad d) I = \int_0^1 \frac{x}{4-x^2} dx.$$

Hướng dẫn giải

$$e) I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^3} = \int_0^1 \frac{d(1+x)}{(1+x)^3} = -\frac{1}{2(1+x)^2} \Big|_0^1 = \frac{3}{8}.$$

$$f) I = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = (x - \ln(x+1)) \Big|_0^1 = 1 - \ln 2.$$

$$g) I = \int_0^1 \frac{2x+9}{x+3} dx = \int_0^1 \left(2 + \frac{3}{x+3}\right) dx = (2x + 3\ln(x+3)) \Big|_0^1 = 3 + 6\ln 2 - 3\ln 3.$$

$$h) I = \int_0^1 \frac{x}{4-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(4-x^2)}{4-x^2} = \ln |4-x^2| \Big|_0^1 = \ln \frac{3}{4}.$$

Bài tập áp dụng

$$1) I = \int_0^1 x^3(x^4 - 1)^5 dx.$$

$$2) I = \int_0^1 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x} + 1) dx.$$

$$3) I = \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx.$$

$$4) I = \int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}}.$$

VI. Dạng 2: Dùng tính chất cận trung gian để tính tích phân

Sử dụng tính chất $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 2: Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 |x+1| dx$.

Hướng dẫn giải

Nhận xét: $|x+1| = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x \leq 2 \\ -x-1, & -2 \leq x < -1 \end{cases}$. Do đó

$$I = \int_{-2}^2 |x+1| dx = \int_{-2}^{-1} |x+1| dx + \int_{-1}^2 |x+1| dx = -\int_{-2}^{-1} (x+1) dx + \int_{-1}^2 (x+1) dx = -\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-2}^{-1} + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^2 = 5.$$

Bài tập áp dụng

1) $I = \int_{-4}^3 |x^2 - 4| dx$.

2) $I = \int_{-1}^2 |x^3 - 2x^2 - x + 2| dx$.

3) $I = \int_0^3 |2^x - 4| dx$.

4) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2|\sin x| dx$.

5) $I = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx$.

VII. Dạng 3: Phương pháp đổi biến số

3) Đổi biến số dạng 1

Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $\alpha \leq u(x) \leq \beta$. Giả sử có thể viết $f(x) = g(u(x))u'(x), x \in [a; b]$, với g liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$. Khi đó, ta có

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u) du.$$

Ví dụ 3: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u = \sin x$. Ta có $du = \cos x dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u(0) = 0; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Khi đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3} u^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

Bài tập áp dụng

1) $I = \int_0^1 x\sqrt{x^2 + 1} dx$.

2) $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{x+1} dx$.

3) $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$.

4) $I = \int_e^{e^2} \frac{dx}{2x\sqrt{2 + \ln x}}$.

Dấu hiệu nhận biết và cách tính tích phân

	Dấu hiệu	Có thể đặt	Ví dụ
1	Có $\sqrt{f(x)}$	$t = \sqrt{f(x)}$	$I = \int_0^3 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+1}}$. Đặt $t = \sqrt{x+1}$
2	Có $(ax+b)^n$	$t = ax+b$	$I = \int_0^1 x(x+1)^{2016} dx$. Đặt $t = x+1$
3	Có $a^{f(x)}$	$t = f(x)$	$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x+3}}{\cos^2 x} dx$. Đặt $t = \tan x + 3$
4	Có $\frac{dx}{x}$ và $\ln x$	$t = \ln x$ hoặc biểu thức chứa $\ln x$	$I = \int_1^e \frac{\ln x dx}{x(\ln x + 1)}$. Đặt $t = \ln x + 1$
5	Có $e^x dx$	$t = e^x$ hoặc biểu thức	$I = \int_0^{\ln 2} e^{2x} \sqrt{3e^x + 1} dx$. Đặt $t = \sqrt{3e^x + 1}$

		chứa e^x	
6	Có $\sin x dx$	$t = \cos x$	$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx$. Đặt $t = \sin x$
7	Có $\cos x dx$	$t = \sin x dx$	$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{2 \cos x + 1} dx$ Đặt $t = 2 \cos x + 1$
8	Có $\frac{dx}{\cos^2 x}$	$t = \tan x$	$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) \frac{1}{\cos^2 x} dx$ Đặt $t = \tan x$
9	Có $\frac{dx}{\sin^2 x}$	$t = \cot x$	$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\cot x}}{1 - \cos 2x} dx = \int \frac{e^{\cot x}}{2 \sin^2 x} dx$. Đặt $t = \cot x$

4) Đổi biến số dạng 2

Cho hàm số f liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[a; b]$. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]^{(*)}$ sao cho $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ và $a \leq \varphi(t) \leq b$ với mọi $t \in [\alpha; \beta]$. Khi đó:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Một số phương pháp đổi biến: Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có dạng

5. $\sqrt{a^2 - x^2}$: đặt $x = |a| \sin t$; $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

6. $\sqrt{x^2 - a^2}$: đặt $x = \frac{|a|}{\sin t}$; $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$

7. $\sqrt{x^2 + a^2}$: $x = |a| \tan t$; $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

8. $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$: đặt $x = a \cos 2t$

Lưu ý: Chỉ nên sử dụng phép đặt này khi các dấu hiệu 1, 2, 3 đi với x mũ chẵn. Ví dụ, để tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ thì phải đổi biến dạng 2 còn với tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ thì nên đổi biến dạng 1.

Ví dụ 4: Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

b) $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $x = \sin t$ ta có $dx = \cos t dt$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Vậy } I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

b) Đặt $x = \tan t$, ta có $dx = (1 + \tan^2 t) dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

$$\text{Vậy } I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$$

VIII. Dạng 4: Phương pháp tính tích phân từng phần.

Định lý: Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = (u(x)v(x))\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx,$$

hay viết gọn là $\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$. Các dạng cơ bản: Giả sử cần tính $I = \int_a^b P(x).Q(x)dx$

Dạng hàm	P(x): Đa thức Q(x): $\sin(kx)$ hay $\cos(kx)$	P(x): Đa thức Q(x): e^{kx}	P(x): Đa thức Q(x): $\ln(ax+b)$	P(x): Đa thức Q(x): $\frac{1}{\sin^2 x}$ hay $\frac{1}{\cos^2 x}$
Cách đặt	* $u = P(x)$ * dv là Phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân	* $u = P(x)$ * dv là Phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân	* $u = \ln(ax+b)$ * $dv = P(x)dx$	* $u = P(x)$ * dv là Phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân

Ví dụ 5: Tính các tích phân sau : a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$. b) $I = \int_0^{e-1} x \ln(x+1) dx$.

Hướng dẫn giải

b) Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases}$ ta có $\begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$.

Do đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = (-x \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0 + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

b) Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = x dx \end{cases}$ ta có $\begin{cases} du = \frac{1}{x+1} dx \\ v = \frac{x^2-1}{2} \end{cases}$

$$I = \int_0^{e-1} x \ln(x+1) dx = \left[\ln(x+1) \frac{x^2-1}{2} \right]_0^{e-1} - \frac{1}{2} \int_0^{e-1} (x-1) dx = \frac{e^2-2e+2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_0^{e-1}$$

$$= \frac{e^2-2e+2}{2} - \frac{1}{2} \frac{e^2-4e+3}{2} = \frac{e^2+1}{4}.$$

Bài tập áp dụng

1) $I = \int_0^1 (2x+2)e^x dx$. 2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cdot \cos x dx$. 3) $I = \int_0^{2\pi} x^2 \cdot \sin \frac{x}{2} dx$. 4) $I = \int_0^1 (x+1)^2 e^{2x} dx$.

II – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 21. Cho hai hàm số f, g liên tục trên đoạn $[a; b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$. B. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

C. $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$. D. $\int_a^b xf(x) dx = x \int_a^b f(x) dx$.

Câu 22. Cho hàm số f liên tục trên \mathbb{R} và số thực dương a . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào luôn đúng?

A. $\int_a^a f(x)dx = 0.$ **B.** $\int_a^a f(x)dx = 1.$ **C.** $\int_a^a f(x)dx = -1.$ **D.** $\int_a^a f(x)dx = f(a).$

Câu 23. Tích phân $\int_0^1 dx$ có giá trị bằng

A. $-1.$ **B.** $1.$ **C.** $0.$ **D.** $2.$

Câu 24. Cho số thực a thỏa mãn $\int_{-1}^a e^{x+1} dx = e^2 - 1$, khi đó a có giá trị bằng

A. $1.$ **B.** $-1.$ **C.** $0.$ **D.** $2.$

Hướng dẫn giải

Ta có $\int_{-1}^a e^{x+1} dx = e^{x+1} \Big|_{-1}^a = e^{a+1} - e$. Vậy yêu cầu bài toán tương đương

$$e^{a+1} - 1 = e^2 - 1 \Leftrightarrow a = 1.$$

Câu 25. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có tích phân trên đoạn $[0; \pi]$ đạt giá trị bằng 0 ?

A. $f(x) = \cos 3x.$ **B.** $f(x) = \sin 3x.$
C. $f(x) = \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right).$ **D.** $f(x) = \sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right).$

Hướng dẫn giải

Tính tích phân cho từng hàm số trong các đáp án:

- $\int_0^\pi \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x \Big|_0^\pi = 0,$
- $\int_0^\pi \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x \Big|_0^\pi = 2,$
- $\int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right) dx = 4 \sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right) \Big|_0^\pi = 2(\sqrt{2} - 2),$
- $\int_0^\pi \sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right) dx = -4 \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right) \Big|_0^\pi = 2\sqrt{2}.$

Vậy chọn $f(x) = \cos 3x.$

Câu 26. Trong các tích phân sau, tích phân nào có giá trị **khác** 2 ?

A. $\int_1^{e^2} \ln x dx.$ **B.** $\int_0^1 2 dx.$ **C.** $\int_0^\pi \sin x dx.$ **D.** $\int_0^2 x dx.$

Hướng dẫn giải

Dù giải bằng máy tính hay làm tay, ta không nên thử tính lần lượt từng đáp án từ A đến D, mà nên chọn các tích phân đơn giản để thử trước. Ví dụ

- $\int_0^1 2 dx = 2x \Big|_0^1 = 2,$
- $\int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 2$
- $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 2,$

nên nhận $\int_1^{e^2} \ln x dx.$

Câu 27. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào thỏa mãn $\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-2}^2 f(x)dx$?

- A. $f(x) = e^x$. B. $f(x) = \cos x$. C. $f(x) = \sin x$. D. $f(x) = x+1$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Phương pháp tự luận

Tính lần lượt từng tích phân (cho đến khi nhận được kết quả đúng), ta được:

- $\int_{-1}^1 \sin x dx = -\cos x|_{-1}^1 = 0 = \int_{-2}^2 \sin x dx \rightarrow$ nhận,
- $\int_{-1}^1 \cos x dx = \sin x|_{-1}^1 = 2 \sin 1$, và $\int_{-2}^2 \cos x dx = \sin x|_{-2}^2 = 2 \sin 2 \rightarrow$ loại,
- $\int_{-1}^1 e^x dx = e^x|_{-1}^1 = e - e^{-1}$, và $\int_{-2}^2 e^x dx = e^x|_{-2}^2 = e^2 - e^{-2} \rightarrow$ loại,
- $\int_{-1}^1 (x+1)dx = \frac{(x+1)^2}{2}|_{-1}^1 = 2$, và $\int_{-2}^2 (x+1)dx = \frac{(x+1)^2}{2}|_{-2}^2 = 4 \rightarrow$ loại.

Vậy ta nhận đáp án $f(x) = \sin x$.

Cách 2: Phương pháp tự luận

Ta đã biết nếu f là hàm số lẻ và liên tục trên \mathbb{R} thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ với mọi số thực a . Trong các lựa chọn ở đây, chỉ có hàm số $y = f(x) = \sin x$ là lẻ, nên đó là đáp án của bài toán.

Cách 3: Phương pháp trắc nghiệm

Thực hiện các phép tính sau trên máy tính (đến khi thu được kết quả bằng 0 thì ngưng)

Phép tính	Kết quả
$\int_{-1}^1 \sin x dx - \int_{-2}^2 \sin x dx$	0
$\int_{-1}^1 \cos x dx - \int_{-2}^2 \cos x dx$	$\neq 0$
$\int_{-1}^1 e^x dx - \int_{-2}^2 e^x dx$	$\neq 0$
$\int_{-1}^1 (x+1)dx - \int_{-2}^2 (x+1)dx$	$\neq 0$

Vậy ta nhận đáp án $f(x) = \sin x$.

Câu 28. Tích phân $I = \int_2^5 \frac{dx}{x}$ có giá trị bằng

- A. $3 \ln 3$. B. $\frac{1}{3} \ln 3$. C. $\ln \frac{5}{2}$. D. $\ln \frac{2}{5}$.

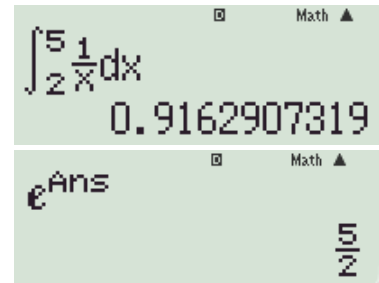
Hướng dẫn giải

Cách 1: Phương pháp tự luận

$$I = \int_2^5 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_2^5 = \ln 5 - \ln 2 = \ln \frac{5}{2}.$$

Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm

Bước 1: Dùng máy tính như hình bên, thu được giá trị 0,91629...



Bước 2: Lấy $e^{0,91629\dots}$ cho kết quả $\frac{5}{2} \rightarrow$ chọn $\ln \frac{5}{2}$.

Cách 3: Phương pháp trắc nghiệm

Thực hiện các phép tính sau trên máy tính (đến khi thu được kết quả bằng 0 thì ngưng)

Phép tính	Kết quả
$\int_2^5 \frac{dx}{x} - \ln \frac{5}{2}$	0
$\int_2^5 \frac{dx}{x} - \frac{1}{3} \ln 3$	$\neq 0$

Phép tính	Kết quả
$\int_2^5 \frac{dx}{x} - 3 \ln 3$	$\neq 0$
$\int_2^5 \frac{dx}{x} - \ln \frac{2}{5}$	$\neq 0$

\rightarrow chọn $\ln \frac{5}{2}$.

Câu 29. Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$ có giá trị bằng

A. $\frac{1}{2} \ln \frac{1}{3}$.

B. $2 \ln 3$.

C. $\frac{1}{2} \ln 3$.

D. $2 \ln \frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Phương pháp tự luận

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}\right) dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cot \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2}\right) dx \\
 &= \left[\ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| - \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \left[\ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \right] - \left[\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \\
 &= \ln \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm

Cách 3: Phương pháp trắc nghiệm

Thực hiện các phép tính sau trên máy tính (đến khi thu được kết quả bằng 0 thì ngưng)

Phép tính	Kết quả
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} - \frac{1}{2} \ln 3$	0
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} - 2 \ln 3$	$\neq 0$

Phép tính	Kết quả
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} - 2 \ln \frac{1}{3}$	$\neq 0$
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3}$	$\neq 0$

→ chọn $\frac{1}{2} \ln 3$.

Nhận xét: Ở bài này cách làm bằng máy tính có vẻ nhanh hơn.

Câu 30. Nếu $\int_{-2}^0 (4 - e^{-x/2}) dx = K - 2e$ thì giá trị của K là

- A. 12,5. B. 9. C. 11. D. 10.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận

$$K = \int_{-2}^0 (4 - e^{-x/2}) dx + 2e = (4x + 2e^{-x/2}) \Big|_{-2}^0 + 2e = 2 - (-8 + 2e) + 2e = 10.$$

Phương pháp trắc nghiệm

Câu 31. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 2} dx$ có giá trị bằng

- A. $\frac{2 \ln 2}{3}$. B. $-\frac{2 \ln 2}{3}$. C. $-2 \ln 2$. D. $2 \ln 2$.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 2} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x+1)} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right] dx = \frac{1}{3} [\ln|x-2| - \ln|x+1|] \Big|_0^1 = -\frac{2 \ln 2}{3}.$$

Học sinh có thể áp dụng công thức $\int \frac{1}{(x-a)(x-b)} dx = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right| + C$ để giảm **một** bước tính:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 2} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x+1)} dx = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| \Big|_0^1 = -\frac{2 \ln 2}{3}.$$

Phương pháp trắc nghiệm

Câu 32. Cho hàm số f và g liên tục trên đoạn $[1;5]$ sao cho $\int_1^5 f(x) dx = 2$ và $\int_1^5 g(x) dx = -4$. Giá trị

của $\int_1^5 [g(x) - f(x)] dx$ là

- A. -6. B. 6. C. 2. D. -2.

Hướng dẫn giải

$$\int_1^5 [g(x) - f(x)] dx = \int_1^5 g(x) dx - \int_1^5 f(x) dx = -4 - 2 = -6.$$

Câu 33. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0;3]$. Nếu $\int_0^3 f(x) dx = 2$ thì tích phân $\int_0^3 [x - 2f(x)] dx$ có giá trị bằng

- A. 7. B. $\frac{5}{2}$. C. 5. D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

$$\int_0^3 [x - 2f(x)] dx = \int_0^3 x dx - 2 \int_0^3 f(x) dx = \frac{9}{2} - 2 \times 2 = \frac{1}{2}.$$

Hướng dẫn giải

Mệnh đề “Nếu $f(x) \geq m \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq m(a-b)$ ” sai, mệnh đề đúng phải là

$$\text{“Nếu } f(x) \geq m \forall x \in [a; b] \text{ thì } \int_a^b f(x)dx \geq m(b-a)\text{”}.$$

Câu 39. Cho hai hàm số f và g liên tục trên đoạn $[a; b]$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \in [a; b]$. Xét các khẳng định sau:

I. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

II. $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$

III. $\int_a^b [f(x) \cdot g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx.$

IV. $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$

Trong các khẳng định trên, có bao nhiêu khẳng định sai?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Hướng dẫn giải

Các công thức $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ và $\int_a^b [f(x) \cdot g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$ là sai.

Câu 40. Tích phân $\int_0^3 x(x-1)dx$ có giá trị bằng với giá trị của tích phân nào trong các tích phân dưới đây?

- A. $\int_0^2 (x^2 + x - 3)dx.$ B. $3 \int_0^{3\pi} \sin x dx.$ C. $\int_0^{\ln \sqrt{10}} e^{2x} dx.$ D. $\int_0^{\pi} \cos(3x + \pi) dx.$

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận

Tính rõ từng phép tính tích phân để tìm ra kết quả đúng (chỉ tính đến khi nhận được kết quả đúng thì dừng lại):

- $\int_0^{\ln \sqrt{10}} e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^{\ln \sqrt{10}} = \frac{e^{2 \ln \sqrt{10}} - 1}{2} = \frac{9}{2},$
- $3 \int_0^{3\pi} \sin x dx = -3 \cos x \Big|_0^{3\pi} = 6,$
- $\int_0^2 (x^2 + x - 3) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3} + 2 - 6 = -\frac{4}{3},$
- $\int_0^{\pi} \cos(3x + \pi) dx = \frac{1}{3} \sin(3x + \pi) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{3} (\sin 4\pi - \sin \pi) = 0.$

Vậy chọn $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x} dx$.

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập các phép tính sau vào máy tính để thu kết quả:

Phép tính	Kết quả
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x} dx$	0
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^{3\pi} \sin x dx$	$-\frac{3}{2}$
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^2 (x^2 + x - 3) dx$	$\frac{35}{6}$
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^{\pi} \cos(3x + \pi) dx$	$\frac{9}{2}$

Vậy chọn $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x} dx$.

CHƯƠNG III. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

G. LÝ THUYẾT

1. Hệ trục tọa độ trong không gian

Trong không gian, xét ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một và chung một điểm gốc O . Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vector đơn vị, tương ứng trên các trục Ox, Oy, Oz . Hệ ba trục như vậy gọi là **hệ trục tọa độ vuông góc** trong không gian.

Chú ý: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$.

2. Tọa độ của vector

a) **Định nghĩa:** $\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

b) **Tính chất:** Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3), k \in \mathbb{R}$

- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$

- $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$

- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

- $\vec{0} = (0; 0; 0), \vec{i} = (1; 0; 0), \vec{j} = (0; 1; 0), \vec{k} = (0; 0; 1)$

- \vec{a} cùng phương $\vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} (k \in \mathbb{R})$

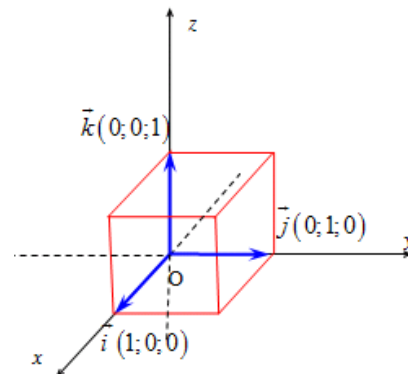
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$$

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$

- $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$



$$\bullet \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (\text{với } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0})$$

3. Tọa độ của điểm

a) Định nghĩa: $M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (x : \text{hoành độ}, y : \text{tung độ}, z : \text{cao độ})$

Chú ý: $\bullet M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0; M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0; M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0$

$\bullet M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0; M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0; M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0.$

b) Tính chất: Cho $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$

$$\bullet \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

$$\bullet AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

\bullet Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB : $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

\bullet Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC :

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

\bullet Tọa độ trọng tâm G của tứ diện $ABCD$:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$$

Chú ý:

– **Tích vô hướng** của hai vectơ thường sử dụng để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, tính góc giữa hai đường thẳng.

– **Tích có hướng** của hai vectơ thường sử dụng để tính diện tích tam giác; tính thể tích khối tứ diện, thể tích hình hộp; chứng minh các vectơ đồng phẳng – không đồng phẳng, chứng minh các vectơ cùng phương.

$$\begin{array}{l} \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0 \end{array}$$

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}(a_1; a_2; a_3), \vec{b}(b_1; b_2; b_3)$. Chọn khẳng định sai.

A. $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$.

B. $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

D. $|\vec{a}|^2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$|\vec{a}|^2 = \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\right)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có ba đỉnh $A(2; 1; -3), B(4; 2; 1), C(3; 0; 5)$ và $G(a; b; c)$ là trọng tâm của tam giác ABC . Tính giá trị biểu thức $P = a \cdot b \cdot c$?

A. $P = 0$.

B. $P = 3$.

C. $P = 5$.

D. $P = 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$G(a;b;c) \text{ là trọng tâm của tam giác } ABC \text{ nên } \begin{cases} a = \frac{2+4+3}{3} = 3 \\ b = \frac{1+2+0}{3} = 1 \\ c = \frac{-3+1+5}{3} = 1 \end{cases}$$

Vậy $P = a.b.c = 3$.

- Câu 48:** Trong không gian với hệ tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 2; 3)$ và $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{k}$. Tính tọa độ vectơ $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$
- A.** $\vec{u} = (-1; 2; 7)$. **B.** $\vec{u} = (-1; 6; 3)$. **C.** $\vec{u} = (-1; 2; -1)$. **D.** $\vec{u} = (-1; -2; 3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\vec{u} = \vec{a} - \vec{b} = (1\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) - (2\vec{i} - 4\vec{k}) = -1\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k} \Rightarrow \vec{u} = (-1; 2; 7).$$

- Câu 49:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 1; 0)$, $B(0; 5; 0)$, $C(2; 0; 3)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- A.** $G(1; 2; 1)$. **B.** $G\left(\frac{3}{2}; 3; \frac{3}{2}\right)$.
C. $G(3; 6; 3)$. **D.** $G(1; 1; 2)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có $G(1; 2; 1)$

- Câu 50:** Hai điểm M và M' phân biệt và đối xứng nhau qua mặt phẳng Oxy . Phát biểu nào sau đây là đúng?
- A.** Hai điểm M và M' có cùng tung độ và cao độ.
B. Hai điểm M và M' có cùng hoành độ và cao độ.
C. Hai điểm M và M' có hoành độ đối nhau.
D. Hai điểm M và M' có cùng hoành độ và tung độ.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

- Câu 51:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Tìm tọa độ hình chiếu M lên trục Ox .
- A.** $(2; 0; 0)$. **B.** $(1; 0; 0)$. **C.** $(3; 0; 0)$. **D.** $(0; 2; 3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Hình chiếu của điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ lên trục Ox là $A'(x_0; 0; 0)$.

Vậy hình chiếu của $M(1; 2; 3)$ lên trục ox là $M'(1; 0; 0)$.

- Câu 52:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Tìm tọa độ điểm N đối xứng với điểm M qua mặt phẳng (Oxy)

- A. $N(-1; -2; -3)$. B. $N(1; 2; 0)$. C. $N(-1; -2; 3)$. D. $N(1; 2; -3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn **D**.

Gọi điểm $N(x'; y'; z')$ đối xứng với điểm $M(x; y; z)$ qua mặt phẳng (Oxy) nên

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2 \\ z' = -3 \end{cases} \Rightarrow N(1; 2; -3)$$

Câu 53: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (m; -2; m+1)$ và $\vec{v} = (3; -2m-4; 6)$. Tìm tất cả các giá trị của m để hai vectơ $\vec{u}; \vec{v}$ cùng phương.

- A. $m=0$. B. $m=2$. C. $m=1$. D. $m=-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn **C**.

$$\vec{u} = (m; -2; m+1) \quad \vec{v} = (3; -2m-4; 6)$$

* $m = -2$:

$$\vec{u} = (-2; -2; -1); \vec{v} = (3; 0; 6) \Rightarrow \vec{u}; \vec{v} \text{ không cùng phương} \rightarrow \text{loại } m = -2:$$

* $m \neq -2$:

$$\frac{m}{3} = \frac{-2}{-2m-4} = \frac{m+1}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{3} = \frac{m+1}{6} \\ \frac{m}{3} = \frac{-2}{-2m-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ \frac{1}{3} = \frac{-2}{-2 \cdot 1 - 4} : \text{đúng} \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Câu 54: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; -2; 3)$, $B(1; 0; -1)$. Gọi M là trung điểm đoạn AB . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\vec{BA} = (-1; -2; -4)$. B. $AB = \sqrt{21}$. C. $M(1; -1; 1)$. D. $\vec{AB} = (-1; -2; 4)$.

Lời giải.

Chọn **B**.

Lần lượt kiểm tra từng đáp án.

+) $\vec{BA} = (-1; -2; 4)$ nên A sai.

+) $AB = |\vec{BA}| = \sqrt{21}$ nên B đúng.

Câu 55: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị của các trục Ox, Oy, Oz . Biểu thức $\vec{i} \cdot \vec{j} + \vec{k} \cdot \vec{j} - \vec{i} \cdot \vec{k}$ nhận giá trị nào sau đây?

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn **C**.

Vì ba vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ đôi một vuông góc nhau nên: $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$; $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$; $\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$. Do đó biểu thức $\vec{i} \cdot \vec{j} + \vec{k} \cdot \vec{j} - \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$

Câu 56: Câu nào sau đây sai?

A. $\vec{a} = -3\vec{i} + \vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k} \Leftrightarrow \vec{a} = \left(-3; 1; \frac{1}{2}\right)$.

B. $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j} \Leftrightarrow \vec{a} = \left(\frac{1}{2}; 0; -5\right)$.

C. $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} \Leftrightarrow \vec{a} = (2; -3; 0)$.

D. $\vec{a} = \frac{2}{5}\vec{j} + \vec{k} - 3\vec{i} \Leftrightarrow \vec{a} = \left(-3; \frac{2}{5}; 1\right)$

Lời giải

Chọn **B.**

$$\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j} \Leftrightarrow \vec{a} = \left(\frac{1}{2}; 0; -5\right)$$

Câu 57: Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

A. $\vec{u} = (1; 2; -1)$.

B. $\vec{u} = (-1; 2; 1)$.

C. $\vec{u} = (2; 1; -1)$.

D. $\vec{u} = (-1; 1; 2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn **A.**

Ta có $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$. Nên $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} = (1; 2; -1)$.

Câu 58: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; -3)$. Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua trục Oy .

A. $M'(-2; -1; -3)$.

B. $M'(-2; -1; 3)$.

C. $M'(2; -1; 3)$.

D. $M'(2; 1; -3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn **B.**

Gọi α là mặt phẳng qua M và vuông góc với Oy , M_1 là hình chiếu của M lên Oy , ta có:
 $\alpha: y + 1 = 0; M_1(0; -1; 0)$.

M' đối xứng với M qua trục $Oy \Leftrightarrow M_1$ là trung điểm $MM' \Rightarrow M'(-2; -1; 3)$.

Câu 59: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $A(1; 2; 0)$; $B(3; -1; 1)$ và $C(1; 1; 1)$. Tính tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

A. $G\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

B. $G\left(-\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

C. $G\left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

D. $G\left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn **A.**

Tọa độ trọng tâm $G\left(\frac{1+3+1}{3}; \frac{2-1+1}{3}; \frac{0+1+1}{3}\right)$ hay $G\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$

Câu 60: Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

A. $\vec{u} = (1; 2; -1)$.

B. $\vec{u} = (-1; 2; 1)$.

C. $\vec{u} = (2; 1; -1)$.

D. $\vec{u} = (-1; 1; 2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn **A.**

Ta có $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$. Nên $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} = (1; 2; -1)$.

Câu 61: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; -3)$. Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua trục Oy .

A. $M'(-2; -1; -3)$.

B. $M'(-2; -1; 3)$.

C. $M'(2; -1; 3)$.

D. $M'(2; 1; -3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi α là mặt phẳng qua M và vuông góc với Oy , M_1 là hình chiếu của M lên Oy , ta có:
 $\alpha: y+1=0; M_1(0; -1; 0)$.

M' đối xứng với M qua trục $Oy \Leftrightarrow M_1$ là trung điểm $MM' \Rightarrow M'(-2; -1; 3)$.

Câu 62: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 2; 0)$; $B(3; -1; 1)$ và $C(1; 1; 1)$. Tính tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

A. $G\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **B.** $G\left(-\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **C.** $G\left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **D.** $G\left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tọa độ trọng tâm $G\left(\frac{1+3+1}{3}; \frac{2-1+1}{3}; \frac{0+1+1}{3}\right)$ hay $G\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Câu 63: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OM} = (1; 5; 2)$, $\overrightarrow{ON} = (3; 7; -4)$. Gọi P là điểm đối xứng với M qua N . Tìm tọa độ điểm P .

A. $P(5; 9; -10)$. **B.** $P(7; 9; -10)$. **C.** $P(5; 9; -3)$. **D.** $P(2; 6; -1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $\overrightarrow{OM} = (1; 5; 2) \Rightarrow M(1; 5; 2)$, $\overrightarrow{ON} = (3; 7; -4) \Rightarrow N(3; 7; -4)$.

Vì P là điểm đối xứng với M qua N nên N là trung điểm của MP nên ta suy ra được

$$\begin{cases} x_P = 2x_N - x_M = 5 \\ y_P = 2y_N - y_M = 9 \\ z_P = 2z_N - z_M = -10 \end{cases} \Rightarrow P(5; 9; -10).$$

Câu 64: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{u} = (-1; 3; -2)$ và $\vec{v} = (2; 5; -1)$. Tìm tọa độ của véc tơ $\vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$

A. $\vec{a} = (-8; 9; -1)$. **B.** $\vec{a} = (-8; -9; 1)$. **C.** $\vec{a} = (8; -9; -1)$. **D.** $\vec{a} = (-8; -9; -1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$2\vec{u} = (-2; 6; -4)$; $3\vec{v} = (6; 15; -3) \Rightarrow \vec{a}(-8; -9; -1)$ (do $\vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$).

Câu 65: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 1; 2)$, $B(6; -3; -2)$. Tìm tọa độ trung điểm E của đoạn thẳng AB .

A. $E(2; -1; 0)$. **B.** $E(2; 1; 0)$. **C.** $E(-2; 1; 0)$. **D.** $E(4; -2; -2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi $E(x, y, z)$ là trung điểm của AB . Ta có:
$$\begin{cases} x = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2 + 6}{2} = 2 \\ y = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1 + (-3)}{2} = -1 \Rightarrow E(2; -1; 0) \\ z = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2 + (-2)}{2} = 0 \end{cases}$$

- Câu 66:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\overline{OA} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 7\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm A .
- A.** $A(-2; -3; 7)$. **B.** $A(2; -3; -7)$. **C.** $A(2; 3; 7)$. **D.** $A(2; -3; 7)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Do $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Leftrightarrow \vec{a} = (x; y; z) \Rightarrow \overline{OA} = (2; -3; 7) \Rightarrow A(2; -3; 7)$.

- Câu 67:** Trong không gian với hệ tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, cho hai điểm A, B thỏa mãn $\overline{OA} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ và $\overline{OB} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$. Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn AB .
- A.** $M\left(-\frac{1}{2}; 1; -2\right)$. **B.** $M\left(\frac{3}{2}; 0; -1\right)$. **C.** $M(3; 0; -2)$. **D.** $M\left(\frac{1}{2}; -1; 2\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $A(2; -1; 1), B(1; 1; -3) \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; 0; -1\right)$.

- Câu 68:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; -3; 2)$, $B(0; 1; -1)$, $G(2; -1; 1)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho tam giác ABC nhận G là trọng tâm.
- A.** $C\left(1; -1; \frac{2}{3}\right)$. **B.** $C(3; -3; 2)$. **C.** $C(5; -1; 2)$. **D.** $C(1; 1; 0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \\ z_A + z_B + z_C = 3z_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 0 + x_C = 3 \cdot 2 \\ -3 + 1 + y_C = 3 \cdot (-1) \\ 2 + (-1) + z_C = 3 \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 5 \\ y_C = -1 \\ z_C = 2 \end{cases} \Leftrightarrow C(5; -1; 2)$$

MỨC ĐỘ 2

- Câu 69:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$, trên trục Oz lấy điểm M sao cho $AM = \sqrt{5}$. Tọa độ của điểm M là
- A.** $M(0; 0; 3)$. **B.** $M(0; 0; 2)$. **C.** $M(0; 0; -3)$. **D.** $M(0; 3; 0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Do $M \in Oz \Rightarrow M(0; 0; m)$

$AM = \sqrt{(m-3)^2 + 5}$. Mặt khác $AM = \sqrt{5}$ nên

$\sqrt{(m-3)^2 + 5} = \sqrt{5} \Leftrightarrow m-3=0 \Leftrightarrow m=3$ suy ra $M(0; 0; 3)$

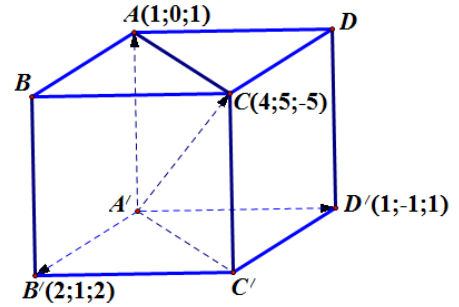
- Câu 70:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(1; 0; 1)$, $B'(2; 1; 2)$, $D'(1; -1; 1)$, $C(4; 5; -5)$. Gọi tọa độ của đỉnh $A'(a; b; c)$. Khi đó $2a + b + c$ bằng
- A.** 3. **B.** 7. **C.** 2. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{A'D'} = (1-a; -1-b; 1-c) \\ \overrightarrow{A'B'} = (2-a; 1-b; 2-c) \\ \overrightarrow{A'A} = (1-a; -b; 1-c) \\ \overrightarrow{A'C} = (4-a; 5-b; -5-c) \end{cases}$$



Theo quy tắc hình hộp, ta có

$$\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{A'A} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-a = 4-3a \\ 5-b = -3b \\ -5-c = 4-3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{5}{2} \\ c = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Vậy $2a+b+c=2$.

Câu 71: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $I(-5;0;5)$ là trung điểm của đoạn MN , biết $M(1;-4;7)$. Tìm tọa độ của điểm N .

- A.** $N(-10;4;3)$. **B.** $N(-2;-2;6)$. **C.** $N(-11;-4;3)$. **D.** $N(-11;4;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$I(-5;0;5)$ là trung điểm của đoạn MN nên ta có

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_M + x_N}{2} \\ y_I = \frac{y_M + y_N}{2} \\ z_I = \frac{z_M + z_N}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_N = 2x_I - x_M \\ y_N = 2y_I - y_M \\ z_N = 2z_I - z_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 2(-5) - 1 \\ y_N = 2 \cdot 0 - (-4) \\ z_N = 2 \cdot 5 - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = -11 \\ y_N = 4 \\ z_N = 3 \end{cases} \text{ . Suy ra } N(-11;4;3) \text{ .}$$

Câu 72: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(0;1;2)$, $N(7;3;2)$, $P(-5;-3;2)$. Tìm tọa độ điểm Q thỏa mãn $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

- A.** $Q(12;5;2)$. **B.** $Q(-12;5;2)$. **C.** $Q(-12;-5;2)$. **D.** $Q(-2;-1;2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N - x_M = x_P - x_Q \\ y_N - y_M = y_P - y_Q \\ z_N - z_M = z_P - z_Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = -5 - x_Q \\ 2 = -3 - y_Q \\ 0 = 2 - z_Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = -12 \\ y_Q = -5 \\ z_Q = 2 \end{cases} \text{ nên ta chọn } \mathbf{C}.$$

Câu 73: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(3;0;3)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho $G(2;2;2)$ là trọng tâm tam giác ABC .

A. $C(2;4;4)$.

B. $C(0;2;2)$.

C. $C(8;10;10)$.

D. $C(-2;-4;-4)$.

Lời giải:

Chọn A

$$G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 4 \\ z_C = 4 \end{cases} \Rightarrow C(2;4;4)$$

Câu 74: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết tọa độ các đỉnh $A(-3;2;1)$, $C(4;2;0)$, $B'(-2;1;1)$, $D'(3;5;4)$. Tìm tọa độ điểm A' của hình hộp.

A. $A'(-3;3;1)$.

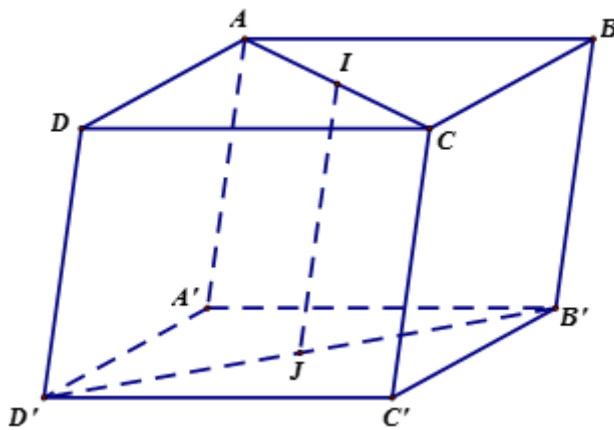
B. $A'(-3;-3;3)$.

C. $A'(-3;-3;-3)$.

D. $A'(-3;3;3)$.

Giải

Chọn D.



Gọi I là trung điểm của $AC \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2}\right)$. Gọi J là trung điểm của $B'D' \Rightarrow J\left(\frac{1}{2}; 3; \frac{5}{2}\right)$.

Ta có $\vec{IJ} = (0; 1; 2)$ và Ta có $\vec{AA'} = \vec{IJ} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} + 3 = 0 \\ y_{A'} - 2 = 1 \\ z_{A'} - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = -3 \\ y_{A'} = 3 \\ z_{A'} = 3 \end{cases}$. Vậy $A'(-3; 3; 3)$.

Câu 75: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;2;-1)$, $B(5;4;3)$. Kí hiệu điểm M thuộc tia đối của tia BA sao cho $\frac{AM}{MB} = 2$. Tọa độ của điểm M là

A. $\left(\frac{13}{3}; \frac{10}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

B. $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{11}{3}\right)$.

C. $(7; 6; 7)$.

D. $(13; 11; 5)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x, y, z)$. Theo yêu cầu bài toán: $\vec{AM} = -2\vec{MB}$

$$\begin{cases} x - 3 = -2(5 - x) \\ y - 2 = -2(4 - y) \\ z + 1 = -2(3 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 6 \\ z = 7 \end{cases}$$

Câu 76: Cho ba vectơ không đồng phẳng $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-1; -3; 1)$, $\vec{c} = (2; -1; 4)$. Khi đó

vector $\vec{d} = (-3; -4; 5)$ phân tích theo ba vector không đồng phẳng $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là

- A. $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$. B. $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$. C. $\vec{d} = \vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$. D. $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Giả sử ta có: } \vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ 2x - 3y - z = -4 \\ 3x + y + 4z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$$

Câu 77: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $MNPQ$ có $M(2;0;0)$, $N(0;-3;0)$, $P(0;0;-4)$. Tìm tọa độ điểm Q .

- A. $Q(-2; -3; -4)$. B. $Q(2; 3; -4)$. C. $Q(-2; -3; 4)$. D. $Q(4; 4; 2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $\vec{MN} = (-2; -3; 0)$, $\vec{QP} = (-x_Q; -y_Q; -4 - z_Q)$. Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành khi và

$$\text{chỉ khi } \vec{MN} = \vec{QP} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_Q = -2 \\ -y_Q = -3 \\ -4 - z_Q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = 2 \\ y_Q = 3 \\ z_Q = -4 \end{cases}. \text{ Vậy } Q(2; 3; -4).$$

Câu 78: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;1), B(1;-1;2), C(1;2;-1)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn $\vec{OM} = 2\vec{AB} - \vec{AC}$.

- A. $M(-2; 6; -4)$. B. $M(2; -6; 4)$. C. $M(-2; -6; 4)$. D. $M(5; 5; 0)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có:

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (-2; -3; 1) \Rightarrow 2\vec{AB} = (-4; -6; 2) \\ \vec{AC} &= (-2; 0; -2) \Rightarrow -\vec{AC} = (2; 0; 2) \\ \Rightarrow \vec{OM} &= (-2; -6; 4) \Rightarrow M(-2; -6; 4). \end{aligned}$$

Câu 79: [2H3-1.2-1]: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;-2), B(2;1;-1)$. Tìm độ dài của đoạn thẳng AB ?

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{18}$ C. $2\sqrt{7}$ D. $\sqrt{3}$

Câu 80: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, Cho ba vector $\vec{a} = (1; 2; 1)$, $\vec{b} = (-3; 5; 2)$, $\vec{c} = (0; 4; 3)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} - 3\vec{k}$ và độ dài của vector $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} - 3\vec{k}$?

- A. $\begin{cases} \vec{n} = (2; -1; -6) \\ |\vec{n}| = \sqrt{41} \end{cases}$ B. $\begin{cases} \vec{n} = (-2; 1; -6) \\ |\vec{n}| = \sqrt{41} \end{cases}$ C. $\begin{cases} \vec{n} = (-2; -1; 6) \\ |\vec{n}| = \sqrt{41} \end{cases}$ D. $\begin{cases} \vec{n} = (-2; -1; -6) \\ |\vec{n}| = \sqrt{41} \end{cases}$

Câu 81: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (1; 2; 1)$, $\vec{b} = (-3; 5; 2)$, $\vec{c} = (0; 4; 3)$. Tìm độ dài của vector $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c} + 5\vec{j}$?

- A. $\sqrt{258}$ B. $\sqrt{825}$ C. $\sqrt{528}$ D. $\sqrt{285}$

Câu 82: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$ và $D(2;2;2)$. Tìm bán kính cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$?

- A. 3 B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Câu 83: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(3;0;4)$, $C(2;1;-1)$. Độ dài đường cao hạ từ đỉnh A của ΔABC là:

- A. $\frac{5}{9}\sqrt{6}$ B. $\sqrt{\frac{33}{50}}$ C. $5\sqrt{3}$ D. $\sqrt{\frac{50}{33}}$

Câu 84: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}(4;-2;-4)$, $\vec{b}(6;-3;2)$ thì $\left| (2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) \right|$ có giá trị là:

- A. 200 B. $\sqrt{200}$ C. 200^2 D. ± 200

Câu 85: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;0;-2)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 25$. Một đường thẳng d đi qua A , cắt mặt cầu tại hai điểm M, N . Độ dài ngắn nhất của MN là

- A. 8. B. 4. C. 6. D. 10.

Lời giải

Chọn A.

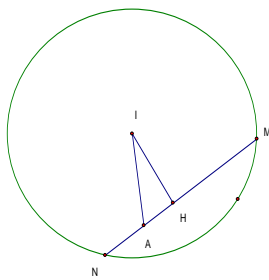
Mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 25$ có tâm $I(1;-2;-3); R=5$

Ta có: $AI = 3 < 5 = R$. Nên điểm A nằm trong mặt cầu.

Gọi H là hình chiếu của I trên đường thẳng d .

Trong tam giác vuông ΔIAH và ΔIHM Ta có: $IH \leq IA$; $\frac{1}{2}MN = HM = \sqrt{IM^2 - IH^2}$

Do đó để MN_{\min} thì $IH_{\max} \Rightarrow IH = IA \Rightarrow MN = 2HM = 2\sqrt{IM^2 - IA^2} = 8$.



Câu 8 Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(2;-2;-5)$ và đường thẳng

$(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Biết $N(a;b;c)$ thuộc (d) và độ dài MN ngắn nhất. Tổng $a+b+c$ nhận giá trị nào sau đây?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Lời giải

Chọn C.

$N \in (d) \Rightarrow N(1+2t; -1+t; -t)$.

$$MN = \sqrt{(2t-1)^2 + (1+t)^2 + (5-t)^2} = \sqrt{6(t-1)^2 + 21} \geq \sqrt{21}$$

$\Rightarrow MN$ ngắn nhất bằng $\sqrt{21}$ khi $t=1$ khi đó $N(3;0;-1) \Rightarrow a+b+c=3+0-1=2$.

Câu 86: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(2;1;3)$; $B(0;-1;-1)$; $C(-1;-2;0)$; $D'(3;-2;1)$. Tính thể tích hình hộp.

A. 24.

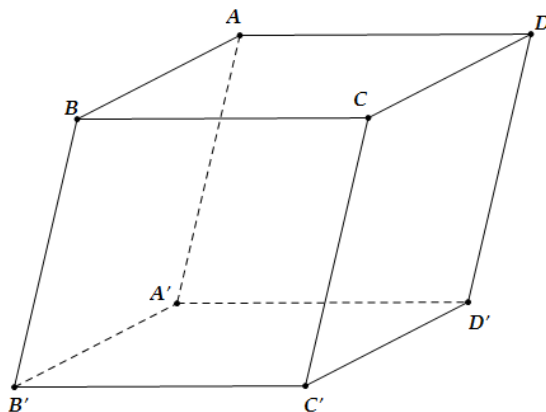
B. 12.

C. 36.

D. 18.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Ta có $\overrightarrow{BA} = (2; 2; 4)$; $\overrightarrow{BC} = (-1; -1; 1)$

$$[\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}] = (6; -6; 0) \Rightarrow S_{ABCD} = \left| [\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}] \right| = \sqrt{6^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}.$$

Mặt phẳng $(ABCD)$ đi qua điểm $A(2;1;3)$ và có vector pháp tuyến $[\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}] = (6; -6; 0)$ có phương trình: $6(x-2) - 6(y-1) + 0(z-3) = 0 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0$.

$$h = d(D'; (ABCD)) = \frac{|3 - (-2) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}.$$

Vậy thể tích hình hộp là $V = S_{ABCD} \cdot h = 6\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 24$.

Câu 87: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(2;1;3)$; $B(0;-1;-1)$; $C(-1;-2;0)$; $D'(3;-2;1)$. Tính thể tích hình hộp.

A. 24.

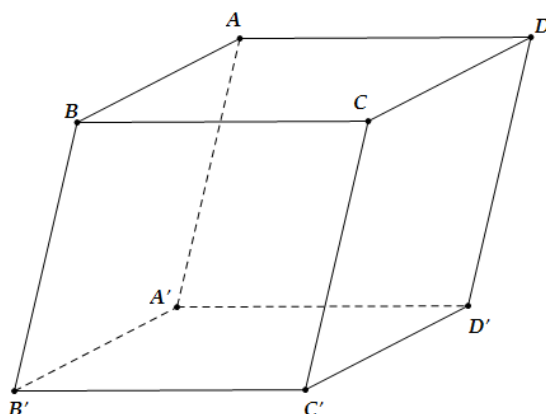
B. 12.

C. 36.

D. 18.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Ta có $\overrightarrow{BA} = (2; 2; 4)$; $\overrightarrow{BC} = (-1; -1; 1)$

$$[\vec{BA}; \vec{BC}] = (6; -6; 0) \Rightarrow S_{ABCD} = \left| [\vec{BA}; \vec{BC}] \right| = \sqrt{6^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}.$$

Mặt phẳng $(ABCD)$ đi qua điểm $A(2; 1; 3)$ và có vectơ pháp tuyến $[\vec{BA}; \vec{BC}] = (6; -6; 0)$ có phương trình: $6(x-2) - 6(y-1) + 0(z-3) = 0 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0$.

$$h = d(D'; (ABCD)) = \frac{|3 - (-2) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}.$$

Vậy thể tích hình hộp là $V = S_{ABCD} \cdot h = 6\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 24$.

Câu 88: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2; 2; -2), B(3; -3; 3)$. M là điểm thay đổi trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng?

- A.** $12\sqrt{3}$. **B.** $6\sqrt{3}$. **C.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **D.** $5\sqrt{3}$.

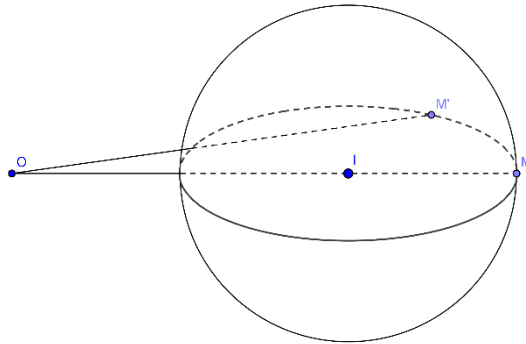
Lời giải

Chọn A.

Gọi $M(x; y; z)$. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{MA}{MB} = \frac{2}{3} &\Leftrightarrow 9MA^2 = 4MB^2 \Leftrightarrow 9[(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2] = 4[(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2] \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 12y + 12z = 0 \Rightarrow M \in \text{mặt cầu } (S) \text{ tâm } I(-6; 6; -6) \text{ bán kính } R = 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } OM_{\max} = d(O; I) + R = OI + R = 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3}.$$



Câu 89: Cho tam giác ABC với $A(1; 2; -1), B(2; -1; 3), C(-4; 7; 5)$. Độ dài phân giác trong của ΔABC kẻ từ đỉnh B là

- A.** $\frac{2\sqrt{74}}{5}$. **B.** $\frac{2\sqrt{74}}{3}$. **C.** $\frac{3\sqrt{73}}{3}$. **D.** $2\sqrt{30}$.

Giải

Chọn B.

Gọi $D(a; b; c)$ là chân đường phân giác kẻ từ đỉnh B .

$$\text{Ta có } \frac{BA}{BC} = \frac{AD}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{AD} = -\frac{1}{2}\overline{CD} \Rightarrow \begin{cases} 2(a-1) = -a-4 \\ 2(b-2) = -b+7 \\ 2(c+1) = -c+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = \frac{11}{3} \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow BD = \frac{2\sqrt{74}}{3}.$$

Câu 90: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;0)$, $B(0;1;1)$, $C(1;0;1)$. Xét điểm D thuộc mặt phẳng Oxy sao cho tứ diện $ABCD$ là một tứ diện đều. Kí hiệu $D(x_0; y_0; z_0)$ là tọa độ của điểm D . Tổng $x_0 + y_0$ bằng:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn **C**

Tính được $AB = BC = CA = \sqrt{2}$.

Do $D \in Oxy \rightarrow D(x_0; y_0; 0)$. Yêu cầu bài toán $\leftrightarrow DA = DB = DC = \sqrt{2} \leftrightarrow \begin{cases} DA = \sqrt{2} \\ DB = \sqrt{2} \\ DC = \sqrt{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{2} \\ \sqrt{x_0^2 + (y_0 - 1)^2 + 1} = \sqrt{2} \\ \sqrt{(x_0 - 1)^2 + y_0^2 + 1} = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 2 \\ x_0^2 + (y_0 - 1)^2 = 1 \\ (x_0 - 1)^2 + y_0^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases} \rightarrow x_0 + y_0 = 2.$$