SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI	**ĐỀ THI OLYMPIC NĂM HỌC 2018-2019**
CỤM TRƯỜNG THPT	**MÔN TOÁN – KHỐI 11**
HÀ ĐÔNG – HOÀI ĐỨC	Thời gian làm bài : 150'(không kể thời gian giao đề)
....	*Đề thi gồm 1 trang*

Bài 1. *(4,0 điểm)*. Giải các phương trình sau :

a) $\sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\sin 2x$.

b) $\dfrac{\sin x + \sin 2x}{\sin 3x} = -1$.

Bài 2. *(4,0 điểm)*.

a) Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển: $(\dfrac{2}{x} - 3x^2)^{10}$ $(x \neq 0)$.

b) Trong một hộp kín đựng 100 tấm thẻ như nhau được đánh số từ 1 đến 100. Lấy ngẫu nhiên ba tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất để lấy được ba tấm thẻ mà ba số ghi trên ba tấm thẻ đó lập thành một cấp số cộng.

Bài 3. *(4,0 điểm)*.

a) Tính $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{C_{2018}^0 + C_{2018}^2 x^2 + C_{2018}^4 x^4 + ... + C_{2018}^{2018} x^{2018} - 2^{2017}}{x-1}$.

b) Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1,\ u_2 = 4 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n - 2\ \forall n \geq 1,\ n \in \square \end{cases}$

Xác định công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

Bài 4. *(6,0 điểm)*.

a) Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có tất cả các cạnh bằng nhau. Điểm M di động trên cạnh AB, điểm N di động trên cạnh A'D' sao cho A'N = 2AM. Gọi (α) là mặt phẳng chứa MN và song song với AC. Dựng thiết diện của hình hộp bởi (α) và chứng minh rằng (α) luôn chứa một đường thẳng cố định.

b) Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng:

$$(\mathrm{AB} + \mathrm{CD})^2 + (\mathrm{AD} + \mathrm{BC})^2 > (\mathrm{AC} + \mathrm{BD})^2.$$

Bài 5. *(2,0 điểm)*. Chứng minh rằng với mọi số thực $a,\ b,\ c \in [1;2]$ ta luôn có:

$$(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \leq 10.$$

……………….Hết…………………….

Học sinh không sử dụng tài liệu.

Họ và tên thí sinh:……………………………………………Số báo danh:…………

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI

CỤM TRƯỜNG THPT

HÀ ĐÔNG – HOÀI ĐỨC

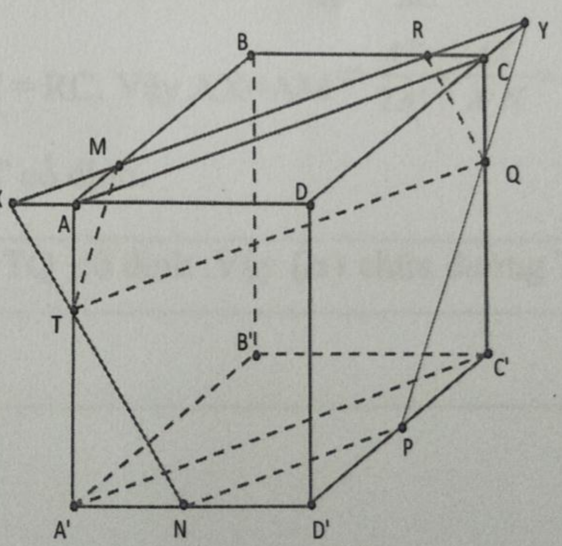
ĐỀ THI OLYMPIC NĂM HỌC 2018-2019

MÔN TOÁN – KHỐI 11

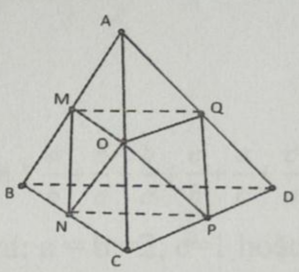
ĐÁP ÁN TOÁN 11

Bài	Ý	Đáp án	Điểm
1	a) (2đ)	Phương trình: $\sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x=2\sin 2x$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x=\sin 2x$	0,5
		$\Leftrightarrow \sin(3x+\frac{\pi}{3})=\sin 2x$	0,5
		$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+\frac{\pi}{3}=2x+k2\pi \\ 3x+\frac{\pi}{3}=\pi-2x+k2\pi \end{array}\right.$	0,5
		$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\frac{2\pi}{15}+\frac{k2\pi}{5} \end{array}\right.$	0,5
	b) (2đ)	$\frac{\sin x+\sin 2x}{\sin 3x}=-1$. ĐK: $\sin 3x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{3}$	0,5
		PT $\Leftrightarrow \sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$ $\Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x+1)=0$	0,5
		PT $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x=0 \\ 2\cos x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{k\pi}{2} \\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.$	0,5
		Đối chiếu điều kiện, phương trình có nghiệm là: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$	0.5
2	a) (2đ)	$(\frac{2}{x}-3x^2)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k.(\frac{2}{x})^{10-k}.(-3x^2)^k$	0,5

		$=\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k.2^{10-k}.(-3)^k.x^{3k-10}$	0,5
		Số hạng chứa x^5 trong khai triển trên ứng với: $3k-10=5 \Leftrightarrow k=5$	0,5
		$\Rightarrow$ SH đó là : $C_{10}^5.2^5.(-3)^5x^5=-1959552x^5$	0,5
	b)	Số phần tử của không gian mẫu: $\lvert\Omega\rvert = C_{100}^3$	0,5
	(2đ)	Gọi ba số lập thành cấp số cộng lần lượt là: u_1,u_2,u_3. Dễ có: u_1,u_3 phải cùng là hai số chẵn hoặc cùng là hai số lẻ. Từ 1 đến 100 có 50 số chẵn, 50 số lẻ.	0,5
		TH1: u_1,u_3 là hai số chẵn: có C_{50}^2 cách chọn bộ $\{u_1,u_3\}$ TH2: u_1,u_3 là hai số lẻ: có C_{50}^2 cách chọn bộ $\{u_1,u_3\}$ Với mỗi cách chọn bộ $\{u_1,u_3\}$ có duy nhất một cách chọn u_2 để u_1,u_2,u_3 lập thành cấp số cộng Suy ra số cách lấy được 3 thẻ ghi ba số lập thành cấp số cộng là: $\lvert\Omega_A\rvert = 2.C_{50}^2$	0,5
		Xác suất lấy được 3 thẻ ghi ba số lập thành cấp số cộng là: $P(A)=\dfrac{\lvert\Omega_A\rvert}{\lvert\Omega\rvert}=\dfrac{1}{66}$	0,5
3	a) (2đ)	Có $S_1 = C_{2018}^0 + C_{2018}^1x + C_{2018}^2x^2 + ... + C_{2018}^{2018}x^{2018} = (1+x)^{2018}$ $S_2 = C_{2018}^0 - C_{2018}^1x + C_{2018}^2x^2 - ... + C_{2018}^{2018}x^{2018} = (1-x)^{2018}$ $\Rightarrow S = C_{2018}^0 + C_{2018}^2x^2 + C_{2018}^4x^4 + ... + C_{2018}^{2018}x^{2018} = \dfrac{1}{2}\left[(1+x)^{2018} + (1-x)^{2018}\right]$	0,5
		$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{C_{2018}^0 + C_{2018}^2x^2 + C_{2018}^4x^4 + ... + C_{2018}^{2018}x^{2018} - 2^{2017}}{x-1}$ $= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1+x)^{2018} + (1-x)^{2018} - 2^{2018}}{2(x-1)}$	0,5
		$= \lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{(1+x)^{2018} - 2^{2018}}{2(x-1)} + \dfrac{(x-1)^{2017}}{2}\right]$ $= \lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{(x-1)\left[(1+x)^{2017} + (1+x)^{2016}.2 + (1+x)^{2015}.2^2 + ... + 2^{2017}\right]}{2(x-1)} + \dfrac{(x-1)^{2017}}{2}\right]$	0,5

		$=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{\left[(1+x)^{2017}+(1+x)^{2016}.2+(1+x)^{2015}.2^2+...+2^{2017}\right]}{2}+\dfrac{(x-1)^{2017}}{2}\right]$ $=2018.2^{2016}$	0,5
	b (2đ)	Dự đoán: $u_n=3^{n-1}+2^{n-1}-1$ (*) - Kiểm tra dễ có (*) đúng với n=1, n=2.	0,5
		-Giả sử mệnh đề đúng với $\forall n\le k$. Tức là ta có : $u_k=3^{k-1}+2^{k-1}-1$ và $u_{k-1}=3^{k-2}+2^{k-2}-1$ (*). Ta chứng minh mệnh đề đúng với $n=k+1$.	0,5
		Theo giả thiết ta có: $u_{k+1}=5u_k-6u_{k-1}-2$ Áp dụng giả thiết quy nạp ta có: $u_{k+1}=5(3^{k-1}+2^{k-1}-1)-6(3^{k-2}+2^{k-2}-1)-2$ $=5.3^{k-1}+5.2^{k-1}-2.3^{k-1}-3.2^{k-1}-1$ $=3^k+2^k-1$	0,5
		Vậy (*) đúng với mọi $\forall n\in \mathbb{N}^*$.	0,5
4	a (4đ)	- Đúng hình vẽ thiết diện và nêu đúng thiết diện: lục giác MRQPNT.  	

		* Nêu cách dựng thiết diện : Xét $(\alpha)\cap(ABCD)=d$ có: $\begin{cases} M\in(\alpha)\cap(ABCD) \\ AC//(\alpha) \\ AC\subset(ABCD) \end{cases}$ Nên d là đường qua M và song song với AC, d cắt AD tại X, cắt CD tại Y, cắt BC tại R.	0,5
		Tương tự $(\alpha)\cap(A'B'C'D')=d'$ qua N và song song với AC cắt C'D' tại P . XN cắt AA' tại T, YP cắt CC' tại Q. Vậy thiết diện cần tìm là lục giác MRQPNT.	0,5
		- Có: $\begin{cases} AC//(\alpha) \\ AC\subset(ACC'A') \\ (\alpha)\cap(ACC'A')=TQ \end{cases} \Rightarrow TQ//AC$	0,5
		- CM: Trong (ADD'A') có: AX // A'N$\Rightarrow \frac{AT}{TA'}=\frac{AX}{A'N}$ - Dễ có, tứ giác AXRC là hình bình hành suy ra AX = CR. - Xét tam giác ABC cân có MR//AC $\Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{RC}{BC}$ Mà AB= BC nên AM = RC. Vậy AX=AM$\Rightarrow \frac{AT}{TA'}=\frac{AX}{A'N}=\frac{AM}{A'N}=\frac{1}{2}$ $\frac{AT}{TA'}=\frac{1}{2}$.Suy ra điểm T cố định.	1
		- Suy ra đường thẳng TQ cố định .Vậy (α) chứa đường TQ cố định.	0,5
	b (2đ)		

		 	
4		- Gọi M,N, P,Q, O lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, AD, AC. Ta có tứ giác MNPQ là hình bình hành và điểm O không nằm trên (MNPQ) - Từ đó, ta có: $(AB+CD)^2+(AD+BC)^2$ $=(2ON+2OQ)^2+(2OP+2OM)^2>4NQ^2+4MP^2$ (1)	1
		- Ta lại có: $4NQ^2+4MP^2=4(2MN^2+2MQ^2)=2(AC^2+BD^2)\geq(AC+BD)^2$ (2) - Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.	1
5		$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\leq 10$ $\Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\leq 7$ Không mất tính tổng quát, giả sử : $a\geq b\geq c$. Khi đó: $(a-b)(b-c)\geq 0\Leftrightarrow ab+bc\geq b^2+ac\Leftrightarrow \frac{a}{c}+1\geq\frac{b}{c}+\frac{a}{b}$ Cũng có: $(a-b)(b-c)\geq 0\Leftrightarrow ab+bc\geq b^2+ac\Leftrightarrow 1+\frac{c}{a}\geq\frac{b}{a}+\frac{c}{b}$ Do đó: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\leq\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+2$ $\Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\leq 2(\frac{a}{c}+\frac{c}{a})+2$ (1)	1

		Đặt: $x = \frac{a}{c}$ $(1 \le x \le 2)$ nên : $(x-1)(x-2) \le 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 \le 0$ $\Rightarrow x + \frac{2}{x} \le 3 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \le 3 - \frac{1}{x} \le \frac{5}{2}$ Hay: $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \le \frac{5}{2}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \le 7$ (đpcm) Dấu bằng xảy ra khi: a = b =2, c=1 hoặc a=2, b=c =1 hoặc các hoán vị tương ứng của chúng.	1