

Chuyên đề 2

Phương Trình - Bất Phương Trình & Hệ Phương Trình Đại Số

§1. Phương Trình - Bất Phương Trình Không Chứa Căn

A. Phương Pháp Giải Cơ Bản

1. Đưa về phương trình tích.

- Biến đổi đưa phương trình về dạng $f(x).g(x) = 0$.
- Áp dụng công thức $f(x).g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$.

2. Đặt ẩn phụ.

- Chọn ẩn phụ $t = u(x)$ phù hợp.
- Đưa phương trình về phương trình theo ẩn t đã biết cách giải (phương trình có thể vẫn chứa x).

3. Phương pháp khoảng (đối với phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối).

- Lập bảng xét dấu các biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối.
- Xét phương trình trên từng khoảng.

Lưu ý. Nếu phương trình chỉ chứa một dấu giá trị tuyệt đối $|f(x)|$ thì xét hai trường hợp $f(x) \geq 0$ và $f(x) < 0$.

B. Bài Tập

2.1. Giải các bất phương trình sau

- a) $x^2 - 6x + 6 > 0$.
b) $-4x^2 + x - 2 \geq 0$.
c) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x - 10 \leq 0$.
d) $x^4 + x^2 + 4x - 3 \geq 0$.

2.2. Giải các bất phương trình sau

- a) $\frac{x-2}{x^2-9x+8} \geq 0$.
b) $\frac{x^2-3x-2}{x-1} \geq 2x+2$.
c) $\frac{x+5}{2x-1} + \frac{2x-1}{x+5} > 2$.
d) $\frac{1}{x^2-5x+4} < \frac{1}{x^2-7x+10}$.

2.3. Giải các phương trình sau

- a) $x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0$.
b) $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + 7x - \sqrt{3} = 0$.
c) $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$.
d) $(x-3)^3 + (2x+3)^3 = 18x^3$.
e) $(x^2+1)^3 + (1-3x)^3 = (x^2-3x+2)^3$.
f) $(4+x)^2 - (x-1)^3 = (1-x)(x^2-2x+17)$.

2.4. Giải các phương trình sau

- a) $(x^2-4x+3)^2 - (x^2-6x+5)^2 = 0$.
b) $x^4 = (2x-5)^2$.
c) $x^4 + 3x^2 + 3 = 2x$.
d) $x^4 - 4x - 1 = 0$.
e) $x^4 = 6x^2 - 12x + 8$.
f) $x^4 = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 1$.

2.5. Giải các phương trình sau

- a) $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 2$.
b) $(x+1)^4 + (x+3)^4 = 16$.
c) $(x+3)^4 + (x-1)^4 = 82$.
d) $x^4 + (x-1)^4 = \frac{41}{8}$.

2.6. Giải các phương trình sau

- a) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 3$.
b) $(x^2+1)(x+3)(x+5) + 16 = 0$.
c) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-6) = 3x^2$.
d) $(x^2-2x+4)(x^2+3x+4) = 14x^2$.

2.7. Giải các phương trình sau

- a) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$.
 b) $2x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 3x + 2 = 0$.
 c) $2x^4 + 3x^3 - 27x^2 + 6x + 8 = 0$.
 d) $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 10x + 4 = 0$.

2.8. Giải các phương trình sau

- a) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$.
 b) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$.
 c) $(x^2 - 2x - 2)^2 - 2x^2 + 3x + 2 = 0$.
 d) $(4x + 3)^2(x + 1)(2x + 1) = 810$.

2.9. Giải các phương trình sau

- a) $\frac{1}{2x^2 - x + 1} + \frac{1}{2x^2 - x + 3} = \frac{6}{2x^2 - x + 7}$.
 b) $\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1$.
 c) $\frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} = -\frac{5}{2}$.
 d) $\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2 + \frac{x-3}{x+2} - 2\left(\frac{x-3}{x-1}\right)^2 = 0$.
 e) $x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 1$.
 f) $\left(\frac{1}{x^2 + x + 1}\right)^2 + \left(\frac{1}{x^2 + x + 2}\right)^2 = \frac{13}{36}$.

2.10. Giải các phương trình sau

- a) $|x - 1| = |x^2 - 3x + 1|$.
 b) $|x^2 + 4x - 5| = |x^2 + 5|$.
 c) $|x^2 - 5x + 4| - x = 4$.
 d) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} = 5 - x^2$.
 e) $|x^2 - 5x + 4| = x^2 + 6x + 5$.
 f) $|x^2 - 5x + 5| = -2x^2 + 10x - 11$.

2.11. Giải các phương trình sau

- a) $(x^2 - x)^2 + |x^2 - x| - 6 = 0$.
 b) $3\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^2 - \left|\frac{x+1}{2x-1}\right| - 2 = 0$.
 c) $|x^2 + 3x - 10| + |x^2 - 4| = 0$.
 d) $|x^2 + 3x - 4| + |x^{2011} + 2011x - 2012| = 0$.

2.12. Giải các bất phương trình sau

- a) $|x - 2| < |2x + 1|$.
 b) $\left|\frac{2x-3}{x-3}\right| \leq 1$.
 c) $|x^2 - 5x + 4| \leq x^2 + 6x + 5$.
 d) $|x^2 - 2x| + x^2 - 4 > 0$.

2.13. Giải các phương trình sau

- a) $|9 - x| = |6 - 5x| + |4x + 3|$.
 b) $|x^2 - 5x + 4| + |x^2 - 5x| = 4$.
 c) $|7 - 2x| = |5 - 3x| + |x + 2|$.
 d) $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$.
 e) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 5$.
 f) $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2$.

§2. Phương Trình & Bất Phương Trình Chứa Căn

A. Phương Pháp Giải Cơ Bản

1. Sử dụng phép biến đổi tương đương.

- $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$.
- $\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.
- $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$.
- $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$.
- $\sqrt[3]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^3(x)$.
- $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$.

2. Đặt ẩn phụ

- Dạng 1: Đặt $t = u(x)$, đưa phương trình về ẩn t (phương trình có thể vẫn chứa ẩn x).
- Dạng 2: Đặt $u = u(x); v = v(x)$, đưa phương trình về hệ theo ẩn u và v .

3. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

- Dự đoán nghiệm (nếu có).
- Sử dụng tính đơn điệu của hàm số để chỉ ra phương trình chỉ có nghiệm đã dự đoán (hoặc chỉ ra PTVN).

4. Đánh giá hai vế.

- Đánh giá $f(x) \geq A; g(x) \leq A$. Khi đó $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$.

B. Bài Tập

2.14. Giải các phương trình sau

- a) $x - \sqrt{x-1} - 7 = 0$.
 b) $\sqrt{2x+9} = \sqrt{4-x} + \sqrt{3x+1}$.
 c) $\sqrt{3x-3} - \sqrt{5-x} = \sqrt{2x-4}$.
 d) $\sqrt{2x} + \sqrt{6x^2+1} = x+1$.
 e) $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{3x+1}$.
 f) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0$.

2.15. Giải các bất phương trình sau

- a) $\sqrt{x^2-4x-12} > 2x+3$.
 b) $\sqrt{x^2-4x-12} \leq x-4$.
 c) $\sqrt[3]{6x-9x^2} < 3x$.
 d) $\sqrt{x^3+1} \geq x+1$.

2.16. Giải các bất phương trình sau

- a) (CD-09) $\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-2} \leq \sqrt{5x+1}$.
 b) (A-05) $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-4}$.
 c) $\sqrt{2x} + \sqrt{6x^2+1} > x+1$.
 d) (A-04) $\frac{\sqrt{2(x^2-16)}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \frac{7-x}{\sqrt{x-3}}$.

2.17. Giải các phương trình sau

- a) (D-05) $2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = 4$.
 b) $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-2} - \sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} = 1$.
 c) $x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = 9$.
 d) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{3}$.

2.18. Giải các bất phương trình sau

- a) $\sqrt{\frac{x}{4}} + \sqrt{x-4} \geq 8-x$.
 b) (D-02) $(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2} \geq 0$.
 c) $(x-2)\sqrt{x^2+4} < x^2-4$.
 d) $(x+2)\sqrt{9-x^2} \leq x^2-2x-8$.
 e) $\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-4x+3} \geq 2\sqrt{x^2-5x+4}$.
 f) $\sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{x^2+2x-3} \leq \sqrt{x^2+4x-5}$.

2.19. Giải các phương trình sau

- a) (D-06) $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0$.
 b) $\sqrt{7-x^2} + x\sqrt{x+5} = \sqrt{3-2x-x^2}$.
 c) $\sqrt{2x^2+8x+6} + \sqrt{x^2-1} = 2x+2$.
 d) $3(2+\sqrt{x-2}) = 2x + \sqrt{x+6}$.
 e) $x^2 + 3x + 1 = (x+3)\sqrt{x^2+1}$.
 f) $\sqrt{x^2 - \frac{7}{x^2}} + \sqrt{x - \frac{7}{x^2}} = x$.

2.20. Giải các bất phương trình sau

- a) $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$.
 b) $\frac{1-\sqrt{21-4x+x^2}}{x+1} \geq 0$.
 c) $\frac{2x}{\sqrt{2x+1}-1} > 2x+2$.
 d) $\frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2} > x-4$.

2.21. Giải các phương trình sau

- a) $(x+5)(2-x) = 3\sqrt{x^2+3x}$.
 b) $\sqrt{(x+1)(2-x)} = 1+2x-2x^2$.
 c) $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x+1)(4-x)} = 5$.
 d) $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 4x-9 + 2\sqrt{3x^2-5x+2}$.

2.22. Giải các phương trình sau

- a) $x + \sqrt{4-x^2} = 2 + 3x\sqrt{4-x^2}$.
 b) $(x-3)(x+1) + 4(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = -3$.
 c) $\frac{4}{x^2} + \frac{x^2}{4-x^2} + \frac{5}{2} \left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \right) + 2 = 0$.
 d) (B-2011) $3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} = 10-3x$.

2.23. Giải các phương trình sau

- a) $x^2 + 3x + 2 \geq 2\sqrt{x^2+3x+5}$.
 b) $x^2 + \sqrt{2x^2+4x+3} \geq 6-2x$.
 c) $x(x+1) - \sqrt{x^2+x+4} + 2 \geq 0$.
 d) $x^2 - 2x + 8 - 6\sqrt{(4-x)(2+x)} \leq 0$.
 e) $\frac{x}{x+1} - 2\sqrt{\frac{x+1}{x}} > 3$.
 f) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} + 2\sqrt{x^2+x-2} \leq 11-2x$.

2.24. Giải các phương trình sau

- a) $x^2 - 1 = 2x\sqrt{x^2-2x}$.
 b) $x^2 - 1 = 2x\sqrt{x^2+2x}$.
 c) $(4x-1)\sqrt{x^3+1} = 2x^3+2x+1$.
 d) $x^2 + 4x = (x+2)\sqrt{x^2-2x+24}$.

2.25. Giải các phương trình sau

- a) $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$.
 b) (A-09) $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$.
 c) $2(x^2+2) = 5\sqrt{x^3+1}$.
 d) $2(x^2-3x+2) = 3\sqrt{x^3+8}$.

2.26. Giải các phương trình sau

a) $x^2 + \sqrt{x+5} = 5.$

c) $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}.$

b) $x^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3x-2}.$

d) $x\sqrt[3]{35-x^3} (x + \sqrt[3]{35-x^3}) = 30.$

2.27. Giải các phương trình, bất phương trình sau

a) (B-2012) $x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} \geq 3\sqrt{x}.$

c) $\sqrt[3]{x^2-2} = \sqrt{2-x^3}.$

b) (A-2010) $\frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)}} \geq 1.$

d) $x + \sqrt{3(1-x^2)} = 2(1-2x^2).$

2.28. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1.$

c) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x^2+3} = 4-x.$

e) $x^3 + 4x - (2x+7)\sqrt{2x+3} = 0.$

b) $\sqrt{x-1} = -x^3 - 4x + 5.$

d) $x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4 = 0.$

f) (CD-2012) $4x^3 + x - (x+1)\sqrt{2x+1} = 0.$

2.29. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x^2-2x+5} + \sqrt{x-1} = 2.$

c) $2(\sqrt{x-2}-1)^2 + \sqrt{x+6} + \sqrt{x-2} - 2 = 0.$

b) $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11.$

d) $\sqrt{5x^3+3x^2+3x-2} = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}.$

§3. Hệ Phương Trình Đại Số

A. Phương Pháp Giải Cơ Bản

1. Đưa về hệ mẫu mực. (Hệ đối xứng loại I, hệ đối xứng loại II, hệ đẳng cấp)

2. Phương pháp thế.

- Loại 1: Rút một biểu thức từ một phương trình rồi thế vào phương trình kia.
- Loại 2: Giải cụ thể một phương trình rồi thế vào phương trình kia.
- Loại 3. Thế hằng số.

3. Đặt ẩn phụ.

4. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

- Nếu $y = f(x)$ luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên D thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v.$

- Nếu $y = f(x)$ luôn đồng biến trên D còn $y = g(x)$ luôn nghịch biến hoặc không đổi trên D thì phương trình $f(x) = g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm trên $D.$

B. Bài Tập

2.30. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x + y + xy = 5 \end{cases}.$

c) (DB-05) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x(x+y+1) + y(y+1) = 2 \end{cases}.$

b) $\begin{cases} x + y + xy = 1 \\ x^3 + y^3 + 3(x-y)^2 - 4 = 0 \end{cases}.$

d) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3(x-y) \\ x^2 + xy + y^2 = 7(x-y)^2 \end{cases}.$

2.31. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \end{cases}.$

c) $\begin{cases} 2x + y = \frac{3}{x^2} \\ 2y + x = \frac{3}{y^2} \end{cases}.$

b) $\begin{cases} x - 3y = \frac{4y}{x} \\ y - 3x = \frac{4x}{y} \end{cases}.$

d) (B-03) $\begin{cases} 3y = \frac{y^2+2}{x^2+2} \\ 3x = \frac{x^2+2}{y^2} \end{cases}.$

2.32. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x^2 - xy = 2 \\ 2x^2 + 4xy - 2y^2 = 14 \end{cases}.$

c) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 \end{cases}.$

b) $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \\ x^2 - 4xy + 5y^2 = 5 \end{cases}.$

d) (DB-06) $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2) = 13 \\ (x+y)(x^2-y^2) = 25 \end{cases}.$

2.33. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x + y = -1 \\ x^3 - 3x = y^3 - 3y \end{cases}.$

c) (B-08) $\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}.$

b) (DB-06) $\begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y \\ (x^2+1)(y+x-2) = y \end{cases}.$

d) (D-09) $\begin{cases} x(x+y+1) - 3 = 0 \\ (x+y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}.$

2.34. Giải các hệ phương trình sau

a) (B-02) $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y} \\ x+y = \sqrt{x+y+2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$

b) (A-03) $\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x^2 - 3xy + x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

2.35. Giải các hệ phương trình sau

a) (DB-07) $\begin{cases} x^4 - x^3y - x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 - xy = -1 \end{cases}$

c) (D-2012) $\begin{cases} xy + x - 2 = 0 \\ 2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0 \end{cases}$

b) (D-08) $\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^3 + 2y^2 = x^2y + 2xy \\ 2\sqrt{x^2 - 2y - 1} + \sqrt[3]{y^3 - 14} = x - 2 \end{cases}$

2.36. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 1 \\ x^3 + y^3 = x + 3y \end{cases}$

c) (DB-06) $\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^3 + 2xy^2 + 12y = 0 \\ 8y^2 + x^2 = 12 \end{cases}$

d) (A-2011) $\begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x+y) = 0 \\ xy(x^2 + y^2) + 2 = (x+y)^2 \end{cases}$

2.37. Giải các hệ phương trình sau

a) (B-09) $\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = 18y^3 \\ 4x^2y + 6x = y^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x^2 + x - \frac{1}{y} = 2 \\ y - y^2x - 2y^2 = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 9 \\ x^2 + 2y^2 = x - 4y \end{cases}$

2.38. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x(3x+2y)(x+1) = 12 \\ x^2 + 2y + 4x - 8 = 0 \end{cases}$

c) (CD-2010) $\begin{cases} 2\sqrt{2x+y} = 3 - 2x - y \\ x^2 - 2xy - y^2 = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \sqrt{y-1}(x+y-1) = (y-2)\sqrt{x+y} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$

d) (DB-05) $\begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

f) (A-08) $\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\frac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1+2x) = -\frac{5}{4} \end{cases}$

2.39. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} \sqrt{x+10} + \sqrt{y-1} = 11 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{y+10} = 11 \end{cases}$

c) (A-2012) $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + y^2 - x + y = \frac{1}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{x-1} - \sqrt{y} = 8 - x^3 \\ (x-1)^4 = y \end{cases}$

d) (A-2010) $\begin{cases} (4x^2+1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \end{cases}$

§4. Phương Trình - Bất Phương Trình & Hệ Chứa Tham Số

A. Kiến Thức Bổ Sung

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D và có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên D . Ta có:

• $m = f(x)$ có nghiệm trên $D \Leftrightarrow \min_{x \in D} f(x) \leq m \leq \max_{x \in D} f(x)$.

• $m \leq f(x)$ có nghiệm trên $D \Leftrightarrow m \leq \max_{x \in D} f(x)$.

• $m \geq f(x)$ có nghiệm trên $D \Leftrightarrow m \geq \min_{x \in D} f(x)$.

• $m \leq f(x), \forall x \in D \Leftrightarrow m \leq \min_{x \in D} f(x)$.

• $m \geq f(x), \forall x \in D \Leftrightarrow m \geq \max_{x \in D} f(x)$.

B. Phương Pháp Giải Cơ Bản

1. Phương pháp tam thức bậc hai.

• Dựa vào định lý về dấu tam thức bậc hai để có điều kiện phù hợp cho từng bài toán.

2. Phương pháp chiều biến thiên hàm số.

• Từ bài toán biến đổi và rút m theo $f(x)$.

• Lập BBT của $f(x)$. Từ BBT và các kiến thức bổ sung để rút ra KL.

3. Phương pháp điều kiện cần và đủ.

• Từ tính chất bài toán rút ra điều kiện cần để xảy ra bài toán.

• Giải điều kiện cần được m , thay lại vào bài toán để kiểm tra.

