ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN
PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG

BÀI TẬP Toán 11

TẬP MỘT

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN
PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG

BÀI TẬP Toán 11

TẬP MỘT

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ
XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

Lời nói đầu

Sách **Bài tập Toán 11** (gồm 2 tập) được biên soạn tương thích với sách giáo khoa Toán 11 (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên – GS.TSKH Đỗ Đức Thái). Nội dung hai cuốn sách hướng đến tạo cơ hội hình thành và phát triển năng lực toán học, phát huy hứng thú học tập, tính chủ động và tiềm năng của mỗi học sinh; bảo đảm tính tích hợp, phân hoá trong dạy học bộ môn Toán.

Nội dung mỗi bài trong sách được thể hiện qua các phần: Kiến thức cần nhớ – Ví dụ – Bài tập.

Các bài tập cơ bản gồm những bài tập giúp học sinh củng cố, kết nối các kiến thức cốt lõi, trọng tâm được học trong mỗi chủ đề. Ngoài ra, có những bài tập nâng cao (được đánh dấu *) ở mức độ vận dụng phát triển và gắn với một số ứng dụng của toán học trong đời sống. Qua đó tạo cơ hội để học sinh nâng cao dần năng lực tư duy, vận dụng giải quyết vấn đề và hình thành niềm yêu thích môn Toán. Những bài tập đó cũng cung cấp tư liệu để các thầy cô giáo dạy học phân hoá, bồi dưỡng học sinh khá, giỏi.

Các tác giả hi vọng sách có thể giúp học sinh học tốt môn Toán theo định hướng phát triển năng lực, đồng thời hỗ trợ tài liệu cho các thầy cô giáo, cha mẹ học sinh nhằm tham gia vào việc nâng cao khả năng tự học, tự thực hành giải quyết vấn đề ở lớp, ở nhà cho học sinh.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng trong khi biên soạn, song cuốn sách khó tránh khỏi sơ suất, rất mong nhận được sự góp ý của đông đảo bạn đọc để cuốn sách được hoàn thiện hơn trong các lần tái bản sau.

Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về: Công ty Cổ phần Đầu tư Xuất bản – Thiết bị Giáo dục Việt Nam, tầng 5, toà nhà hỗn hợp AZ Lâm Viên, 107 A đường Nguyễn Phong Sắc, phường Dịch Vọng Hậu, quận Cầu Giấy, TP. Hà Nội.

Xin chân thành cảm ơn.

Các tác giả

MỤC LỤC

Chương I
HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1 GÓC LƯỢNG GIÁC. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Quan hệ giữa hai đơn vị đo góc: độ và radian

• $180^{\circ} = \pi$ rad.

• $1 \text{ rad} = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ} \approx 57°17'45''$ và $1^{\circ} = \left(\dfrac{\pi}{180}\right)\text{rad} \approx 0{,}0175 \text{ rad}$.

2. Góc lượng giác và số đo của chúng

• Cho hai tia Ou, Ov. Nếu tia Om quay chỉ theo chiều dương (hay chỉ theo chiều âm) xuất phát từ tia Ou đến trùng với tia Ov thì ta nói: Tia Om quét một *góc lượng giác* với tia đầu Ou và tia cuối Ov, kí hiệu là (Ou, Ov). Mỗi góc lượng giác gốc O được xác định bởi tia đầu Ou, tia cuối Ov và số đo của góc đó.

• Nếu một góc lượng giác có số đo α° (hay α radian) thì mọi góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc lượng giác đó có số đo dạng: $\alpha^{\circ} + k360^{\circ}$ (hay $\alpha + k2\pi$), với k là số nguyên, mỗi góc ứng với một giá trị của k.

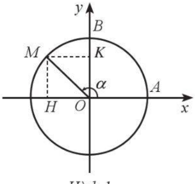
• ***Hệ thức Chasles***

Với ba tia tuỳ ý Ou, Ov, Ow, ta có:

$$(Ou, Ov) + (Ov, Ow) = (Ou, Ow) + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

3. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

Trong mặt phẳng toạ độ đã được định hướng Oxy, lấy điểm $A(1 ; 0)$. Đường tròn tâm O, bán kính $OA = 1$ được gọi là đường tròn lượng giác gốc A.



Hình 1

a) Định nghĩa: Với mỗi góc lượng giác α, lấy điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = \alpha$ (*Hình 1*).

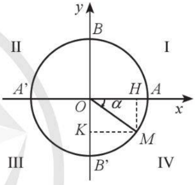
Giả sử M có toạ độ $(x\ ;\ y)$. Ta có:

$\cos\alpha = x;\quad \sin\alpha = y;$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{y}{x}\ (\cos\alpha = x \neq 0);\quad \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{x}{y}\ (\sin\alpha = y \neq 0).$

Chú ý: Dấu của các giá trị lượng giác của góc $\alpha = (OA, OM)$ phụ thuộc vào vị trí điểm M trên đường tròn lượng giác (*Hình 2*). Bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác như sau:

Giá trị lượng giác \ Góc phần tư	I	II	III	IV
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\tan\alpha$	+	–	+	–
$\cot\alpha$	+	–	+	–



Hình 2

b) Tính chất

- $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ với mọi α;
- $\tan\alpha\ .\ \cot\alpha = 1$ với $\cos\alpha \neq 0,\ \sin\alpha \neq 0$;
- $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ với $\cos\alpha \neq 0$;
- $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ với $\sin\alpha \neq 0$.

4. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

- Hai góc đối nhau (α và $-\alpha$):

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha;$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha;$

$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha.$

- Hai góc hơn kém nhau π (α và $\alpha + \pi$):

$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha;$

$\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha;$

$\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha;$

$\cot(\alpha + \pi) = \cot\alpha.$

• Hai góc bù nhau (α và $\pi - \alpha$):

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$;

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$;

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$;

$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$.

• Hai góc phụ nhau (α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$):

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$;

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$;

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$;

$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Góc lượng giác

Ví dụ 1 a) Gọi M_1, M_2, M_3, M_4 là các điểm trên đường tròn lượng giác sao cho số đo của các góc lượng giác (OA, OM_1), (OA, OM_2), (OA, OM_3), (OA, OM_4) lần lượt bằng $\frac{\pi}{3}; -\frac{11\pi}{3}; \frac{10\pi}{3}; \frac{31\pi}{3}$. Có nhận xét gì về vị trí các điểm M_1, M_2, M_3, M_4?

b) Gọi M, N, P là các điểm trên đường tròn lượng giác sao cho số đo của các góc lượng giác (OA, OM), (OA, ON), (OA, OP) lần lượt bằng $\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}$. Chứng minh rằng tam giác MNP là tam giác đều.

Giải

a) Ta có: $-\frac{11\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - 4\pi = \frac{\pi}{3} - 2 \cdot 2\pi$; $\frac{31\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 10\pi = \frac{\pi}{3} + 5 \cdot 2\pi$. Vậy ba điểm M_1, M_2, M_4 trùng nhau.

Ta có: $\frac{10\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 3\pi = \pi + 2\pi$. Vậy điểm M_3 đối xứng với điểm M_1 qua gốc O.

b) Trên đường tròn lượng giác, đi theo chiều dương từ vị trí A, thứ tự các điểm lần lượt là M, N, P và $\widehat{MON} = \widehat{NOP} = \widehat{POM} = \frac{2\pi}{3}$. Ngoài ra ta có $OM = ON = OP$. Suy ra $MN = NP = PM$. Vậy tam giác MNP là tam giác đều.

Vấn đề 2. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

_Ví dụ 2_ Tính các giá trị lượng giác của mỗi góc sau:

a) $\frac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$; b) $\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Giải

a) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+k2\pi\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\left(\frac{\pi}{3}+k2\pi\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$;

$\tan\left(\frac{\pi}{3}+k2\pi\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$; $\cot\left(\frac{\pi}{3}+k2\pi\right)=\cot\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

b) $\tan\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ không xác định; $\cot\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\cot\frac{\pi}{2}=0$.

• Với $k=2l\ (l\in\mathbb{Z})$:

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+l2\pi\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$; $\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+l2\pi\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$;

• Với $k=2l+1\ (l\in\mathbb{Z})$:

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi+l2\pi\right)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$;

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi+l2\pi\right)=\cos\frac{3\pi}{2}=0$;

Vấn đề 3. Áp dụng tính chất của giá trị lượng giác

_Ví dụ 3_ Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α, biết $\tan\alpha=3$ với $-\pi<\alpha<0$.

Giải

Do $\tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}$ nên $\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{3}$.

Ta có: $\frac{1}{\sin^2\alpha}=1+\cot^2\alpha=1+\frac{1}{3^2}=\frac{10}{9}$ nên $\sin^2\alpha=\frac{9}{10}$. Mà $-\pi<\alpha<0$ nên $\sin\alpha<0$.

Do đó, $\sin\alpha = -\dfrac{3}{\sqrt{10}} = -\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

Mặt khác, $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ nên $\cos\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha} = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

Vấn đề 4. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

Ví dụ 4 Tính:

a) $A = \sin^2 5° + \sin^2 10° + \sin^2 15° + ... + \sin^2 85°$ (17 số hạng).

b) $B = \cos 5° + \cos 10° + \cos 15° + ... + \cos 175°$ (35 số hạng).

Giải

a) Vận dụng $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, ta có: $\sin 85° = \cos 5°$, $\sin 80° = \cos 10°$, $\sin 75° = \cos 15°$, …, $\sin 50° = \cos 40°$.

Vậy

$$A = (\sin^2 5° + \cos^2 5°) + (\sin^2 10° + \cos^2 10°) + ... + (\sin^2 40° + \cos^2 40°) + \sin^2 45°$$

$$= \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{8 \text{ số } 1} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{17}{2}.$$

b) Vận dụng $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ ta có: $\cos 175° = -\cos 5°, \cos 170° = -\cos 10°$, $\cos 165° = -\cos 15°$, …, $\cos 95° = -\cos 85°$.

Vậy $B = (\cos 5° + \cos 175°) + (\cos 10° + \cos 170°) + ... + (\cos 85° + \cos 95°) + \cos 90°$

$$= \underbrace{0 + 0 + \ldots + 0}_{17 \text{ số } 1} + \cos 90° = 0.$$

Vấn đề 5. Ứng dụng

Ví dụ 5 Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A, vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất. Giả sử vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 h theo chiều kim đồng hồ. Khi vệ tinh chuyển động được 3 h, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng bao nhiêu? (Tính theo đơn vị radian).

Giải

Theo giả thiết, vệ tinh chuyển động theo chiều kim đồng hồ nên sau 2 h, bán kính của vòng quay khi vệ tinh chuyển động quét được một góc lượng giác bằng -2π (rad).

Vậy khi vệ tinh chuyển động được 3 h thì bán kính của vòng quay quét được một góc lượng giác bằng -3π (rad).

C. BÀI TẬP

1. Trên đường tròn lượng giác lấy điểm M sao cho $(OA, OM) = 40^\circ$. Gọi M' đối xứng với M qua gốc toạ độ. Khi đó số đo của góc lượng giác (OA, OM') bằng:

A. $40^\circ + k360^\circ$. **B.** $140^\circ + k360^\circ$. **C.** $220^\circ + k360^\circ$. **D.** $50^\circ + k360^\circ$.

2. Cho $\cos\alpha = -\dfrac{2}{5}$ với $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khi đó, $\tan\alpha$ bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{21}}{5}$. **B.** $-\dfrac{\sqrt{21}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$. **D.** $-\dfrac{\sqrt{21}}{5}$.

3. Cho $\tan\alpha + \cot\alpha = 2$. Khi đó, $\tan^2\alpha + \cot^2\alpha$ bằng:

A. 8. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 2.

4. Kết quả thu gọn của biểu thức

$A = \sin(\pi + x) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi - x) + \tan\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)$ là:

A. $-2\cot x$. **B.** $2\tan x$. **C.** $2\sin x$. **D.** $-2\sin x$.

5. Cho $\tan\alpha = 2$. Khi đó giá trị của biểu thức $A = \dfrac{\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\,.\,\cos\alpha}{\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha}$ bằng:

A. 4. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

6. Cho lục giác đều $ABCDEF$ nội tiếp trong đường tròn lượng giác (thứ tự đi từ A đến các đỉnh theo chiều ngược chiều kim đồng hồ). Tính số đo của các góc lượng giác (OA, OB), (OA, OC), (OA, OD), (OA, OE), (OA, OF).

7. Cho $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ với $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right)$. Tính $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$.

8. Cho $\cot x = -3$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Tính $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$.

9*. Chứng minh rằng:

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$;

b) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$.

10. Cho $\tan x = -2$. Tính giá trị của mỗi biểu thức sau:

a) $A = \dfrac{3\sin x - 5\cos x}{4\sin x + \cos x}$;

b) $B = \dfrac{2\sin^2 x - 3\sin x \cos x - \cos^2 x}{\sin^2 x + \sin x \cos x}$.

11. Tính:

a) $A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$;

b) $B = \sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5} + ... + \sin \frac{9\pi}{5}$ (gồm 9 số hạng);

c) $C = \tan 1^\circ \,.\, \tan 2^\circ \,.\, \tan 3^\circ \,.\, ... \,.\, \tan 89^\circ$ (gồm 89 thừa số).

12. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có:

a) $\sin B = \sin(A + C)$;

b) $\cos C = -\cos(A + B + 2C)$;

c) $\sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B + C}{2}$;

d) $\tan \frac{A + B - 2C}{2} = \cot \frac{3C}{2}$.

13*. Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3}$ với $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Tính:

a) $A = \sin \alpha \,.\, \cos \alpha$;

b) $B = \sin \alpha - \cos \alpha$;

c) $C = \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$;

d) $D = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$.

14. Một vòng quay Mặt Trời quay mỗi vòng khoảng 15 phút. Tại vị trí quan sát, bạn Linh thấy vòng quay chuyển động theo chiều kim đồng hồ. Khi vòng quay chuyển động được 10 phút, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng bao nhiêu? (Tính theo đơn vị radian).

§2 CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Công thức cộng

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$;

$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$;

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$;

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$;

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$;

$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$

(khi các biểu thức đều có nghĩa).

2. Công thức nhân đôi

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$;

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$;

$\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ (khi các biểu thức đều có nghĩa).

3. Công thức hạ bậc

$\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$;

$\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$.

4. Công thức biến đổi tích thành tổng

$\cos a\cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$;

$\sin a\sin b = -\dfrac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$;

$\sin a\cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$.

5. Công thức biến đổi tổng thành tích

$\cos u + \cos v = 2\cos\dfrac{u+v}{2}\cos\dfrac{u-v}{2}$;

$\sin u + \sin v = 2\sin\dfrac{u+v}{2}\cos\dfrac{u-v}{2}$;

$\cos u - \cos v = -2\sin\dfrac{u+v}{2}\sin\dfrac{u-v}{2}$;

$\sin u - \sin v = 2\cos\dfrac{u+v}{2}\sin\dfrac{u-v}{2}$.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Tính giá trị của các biểu thức chứa giá trị lượng giác

Ví dụ 1 Cho tan $(a + b) = 3$, tan $(a - b) = 2$. Tính tan $2a$, tan $2b$.

Giải

Ta có: $\tan 2a = \tan[(a+b)+(a-b)] = \dfrac{\tan(a+b)+\tan(a-b)}{1-\tan(a+b)\,.\,\tan(a-b)} = \dfrac{3+2}{1-3\,.\,2} = -1;$

$$\tan 2b = \tan[(a+b)-(a-b)] = \frac{\tan(a+b)-\tan(a-b)}{1+\tan(a+b)\,.\,\tan(a-b)} = \frac{3-2}{1+3\,.\,2} = \frac{1}{7}.$$

Ví dụ 2 Cho $\sin a = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Tính cos $2a$, cos $4a$.

Giải

Ta có: $\cos 2a = 1-2\sin^2 a = 1-2\,.\,\dfrac{4}{5} = -\dfrac{3}{5};$

$$\cos 4a = 2\cos^2 2a - 1 = 2\,.\left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25}.$$

Ví dụ 3 Cho $\cos 2x = \dfrac{1}{4}$. Tính:

$A = \cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right);$ $\qquad B = \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right).$

Giải

$$A = \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left\{\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]+\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos 2x + \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}.$$

$$B = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\left\{\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]-\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]\right\}$$

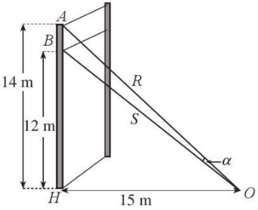
$$= -\frac{1}{2}\left(\cos 2x - \cos\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}.$$

Vấn đề 2. Ứng dụng

Ví dụ 4 Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14 m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12 m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m (*Hình 3*).

a) Tính $\tan\alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.

b) Tính số đo góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).



Hình 3

Giải

a) Ta có: $\alpha = \widehat{AOH} - \widehat{BOH}$.

Trong tam giác vuông AOH, $\tan\widehat{AOH} = \dfrac{AH}{OH} = \dfrac{14}{15}$.

Trong tam giác vuông BOH, $\tan\widehat{BOH} = \dfrac{BH}{OH} = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5}$.

Vậy $\tan\alpha = \tan(\widehat{AOH} - \widehat{BOH}) = \dfrac{\tan\widehat{AOH} - \tan\widehat{BOH}}{1 + \tan\widehat{AOH}\,.\,\tan\widehat{BOH}} = \dfrac{\dfrac{14}{15} - \dfrac{4}{5}}{1 + \dfrac{14}{15}\cdot\dfrac{4}{5}} = \dfrac{10}{131}$.

b) Từ kết quả câu a ta có: $\alpha \approx 4^\circ$.

C. BÀI TẬP

15. Cho hai góc a và b với $\tan a = \dfrac{1}{7}$ và $\tan b = \dfrac{3}{4}$. Khi đó, $\tan(a + b)$ bằng:

A. 1. **B.** $-\dfrac{17}{31}$. **C.** $\dfrac{17}{31}$. **D.** -1.

16. Nếu $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ thì giá trị của $\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$ bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{6} - \dfrac{1}{2}$. **B.** $\sqrt{6} - 3$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{6} - 3$. **D.** $\sqrt{6} - \dfrac{1}{2}$.

17. Nếu $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$ thì giá trị của biểu thức $P = (1 - 3\cos 2\alpha)(2 + 3\cos 2\alpha)$ bằng:

A. $\dfrac{11}{9}$. **B.** $\dfrac{12}{9}$. **C.** $\dfrac{13}{9}$. **D.** $\dfrac{14}{9}$.

18. Chọn đẳng thức đúng trong các đẳng thức sau:

A. $\sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{3-\cos 4x}{4}$.   **B.** $\sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{3+\cos 4x}{4}$.

C. $\sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{3+\cos 4x}{2}$ **D.** $\sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{3-\cos 4x}{2}$.

19. Rút gọn biểu thức $\cos(120^\circ - x)+\cos(120^\circ + x)-\cos x$ ta được kết quả là:

A. $-2\cos x$.   **B.** $-\cos x$.   **C.** 0.   **D.** $\sin x-\cos x$.

20. Nếu $\cos a=\dfrac{3}{4}$ thì giá trị của $\cos\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{a}{2}$ bằng:

A. $\dfrac{23}{16}$.   **B.** $\dfrac{7}{8}$.   **C.** $\dfrac{7}{16}$.   **D.** $\dfrac{23}{8}$.

21. Nếu $\cos a=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ thì giá trị của biểu thức $A=4\sin\left(a+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(a-\dfrac{\pi}{3}\right)$ bằng:

A. $-\dfrac{11}{9}$.   **B.** $\dfrac{11}{9}$.   **C.** $-\dfrac{1}{9}$.   **D.** $\dfrac{1}{9}$.

22. Nếu $\cos a=\dfrac{1}{3}$, $\sin b=\dfrac{-2}{3}$ thì giá trị $\cos(a+b)\cos(a-b)$ bằng:

A. $-\dfrac{2}{3}$.   **B.** $\dfrac{1}{3}$.   **C.** $\dfrac{2}{3}$.   **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

23. Giá trị của biểu thức $P=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{9}+\sin\dfrac{5\pi}{9}}{\cos\dfrac{\pi}{9}+\cos\dfrac{5\pi}{9}}$ bằng:

A. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.   **B.** $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.   **C.** $\sqrt{3}$.   **D.** $-\sqrt{3}$.

24. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x}$ ta được kết quả là:

A. $\tan x$.   **B.** $\tan 3x$.   **C.** $\tan 2x$.   **D.** $\tan x+\tan 2x+\tan 3x$.

25. Cho $\sin a=\dfrac{2}{3}$ với $\dfrac{\pi}{2}<a<\pi$. Tính:

a) $\cos a$, $\tan a$;

b) $\sin\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\cos\left(a-\dfrac{5\pi}{6}\right)$, $\tan\left(a+\dfrac{2\pi}{3}\right)$;

c) $\sin 2a$, $\cos 2a$.

26. Cho $\cos a=0,2$ với $\pi<a<2\pi$. Tính $\sin\dfrac{a}{2}$, $\cos\dfrac{a}{2}$, $\tan\dfrac{a}{2}$.

27. Cho $\tan\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Tính $\sin a$, $\cos a$, $\tan a$.

28. Cho $\cos(a + 2b) = 2\cos a$. Chứng minh rằng: $\tan(a+b)\tan b = \dfrac{-1}{3}$.

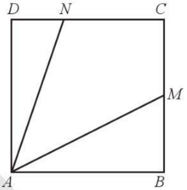
29*. Cho tam giác ABC, chứng minh rằng:

a) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \,.\, \tan B \,.\, \tan C$

(với điều kiện tam giác ABC không vuông);

b) $\tan\dfrac{A}{2} \,.\, \tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{B}{2} \,.\, \tan\dfrac{C}{2} + \tan\dfrac{C}{2} \,.\, \tan\dfrac{A}{2} = 1$;

30. Trên một mảnh đất hình vuông $ABCD$, bác An đặt một chiếc đèn pin tại vị trí A chiếu chùm sáng phân kì sang phía góc C. Bác An nhận thấy góc chiếu sáng của đèn pin giới hạn bởi hai tia AM và AN, ở đó các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh BC, CD sao cho $BM = \dfrac{1}{2}BC, DN = \dfrac{1}{3}DC$ (*Hình 4*).



Hình 4

a) Tính $\tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN})$.

b) Góc chiếu sáng của đèn pin bằng bao nhiêu độ?

§3 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D.

• Hàm số $y = f(x)$ được gọi là *hàm số chẵn* nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.

• Hàm số $y = f(x)$ được gọi là *hàm số lẻ* nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng, đồ thị hàm số lẻ nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

2. Hàm số tuần hoàn

Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là *tuần hoàn* nếu tồn tại một số T khác 0 sao cho với mọi $x \in D$, ta có:

• $x + T \in D$ và $x - T \in D$;

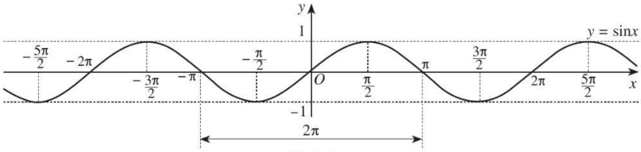
• $f(x + T) = f(x)$.

Số T dương nhỏ nhất (nếu có) thoả mãn các tính chất trên được gọi là *chu kì* của hàm số tuần hoàn đó.

3. Một số hàm số lượng giác cơ bản

a) Hàm số $y = \sin x$

- Hàm số $y = \sin x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$; tập giá trị là đoạn $[-1 ; 1]$.
- Đồ thị hàm số $y = \sin x$ được biểu diễn ở *Hình 5*:

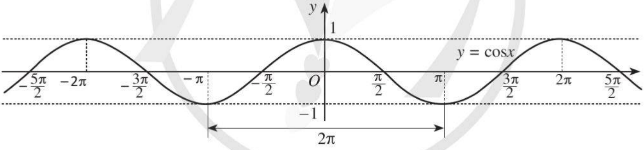


Hình 5

- Tính chất: Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ O; tuần hoàn chu kì 2π; đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi ; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi ; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

b) Hàm số $y = \cos x$

- Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$; tập giá trị là đoạn $[-1 ; 1]$.
- Đồ thị hàm số $y = \cos x$ được biểu diễn ở *Hình 6*:

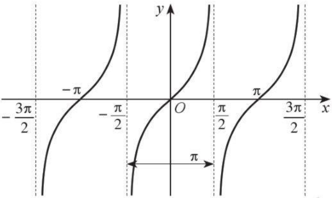


Hình 6

- Tính chất: Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn, có đồ thị đối xứng qua trục tung; tuần hoàn chu kì 2π; đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi ; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi ; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

c) Hàm số $y = \tan x$

- Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; tập giá trị là $\mathbb{R}$.
- Đồ thị hàm số $y = \tan x$ được biểu diễn ở *Hình 7*:



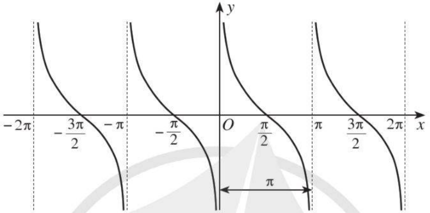
Hình 7

• Tính chất: Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ O; tuần hoàn chu kì π; đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

d) Hàm số $y = \cot x$

• Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$; tập giá trị là $\mathbb{R}$.

• Đồ thị hàm số $y = \cot x$ được biểu diễn ở *Hình 8*:



Hình 8

• Tính chất: Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ O; tuần hoàn chu kì π; nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi\ ;\ \pi + k\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Dựa vào đồ thị để tính giá trị của hàm số, xét sự tương giao

Ví dụ 1 Dùng đồ thị hàm số, tìm giá trị của x trên đoạn $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$ để:

a) Hàm số $y = \sin x$ nhận giá trị bằng 1; b) Hàm số $y = \sin x$ nhận giá trị bằng 0;

c) Hàm số $y = \cos x$ nhận giá trị bằng -1; d) Hàm số $y = \cos x$ nhận giá trị bằng 0.

Giải

Trên đoạn $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$,

a) Hàm số $y = \sin x$ nhận giá trị bằng 1 với $x \in \left\{-\dfrac{3\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

b) Hàm số $y = \sin x$ nhận giá trị bằng 0 với $x \in \{-2\pi;\ -\pi;\ 0;\ \pi;\ 2\pi\}$.

c) Hàm số $y = \cos x$ nhận giá trị bằng -1 với $x \in \{-\pi;\ \pi\}$.

d) Hàm số $y = \cos x$ nhận giá trị bằng 0 với $x \in \left\{-\dfrac{3\pi}{2};\ -\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

Ví dụ 2 Dùng đồ thị hàm số, hãy cho biết:

a) Với mỗi $m \in [-1\ ;\ 1]$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin \alpha = m$;

b) Với mỗi $m \in \mathbb{R}$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan\alpha = m$.

Giải

a) Số giá trị $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin\alpha = m$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ và đường thẳng $y = m$. Căn cứ vào đồ thị hàm số, với mỗi $m \in [-1; 1]$, có đúng một giá trị $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin\alpha = m$.

b) Số giá trị $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan\alpha = m$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và đường thẳng $y = m$. Căn cứ vào đồ thị hàm số, với mỗi $m \in \mathbb{R}$, có đúng một giá trị $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan\alpha = m$.

Vấn đề 2. Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số lượng giác

Ví dụ 3 Xét sự biến thiên của mỗi hàm số sau trên các khoảng tương ứng:

a) $y = \sin x$ trên khoảng $\left(-\frac{9\pi}{2}; -\frac{7\pi}{2}\right), \left(\frac{21\pi}{2}; \frac{23\pi}{2}\right)$;

b) $y = \cos x$ trên khoảng $(-20\pi; -19\pi), (-9\pi; -8\pi)$.

Giải

a) Ta có:

- $\left(-\frac{9\pi}{2}; -\frac{7\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2} - 4\pi; \frac{\pi}{2} - 4\pi\right)$.

  Do hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số đó cũng đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{9\pi}{2}; -\frac{7\pi}{2}\right)$.

- $\left(\frac{21\pi}{2}; \frac{23\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + 10\pi; \frac{3\pi}{2} + 10\pi\right)$.

  Do hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ nên hàm số đó cũng nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{21\pi}{2}; \frac{23\pi}{2}\right)$.

b) Ta có:

- $(-20\pi ; -19\pi) = (0 - 20\pi ; \pi - 20\pi)$.

Do hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $(0 ; \pi)$ nên hàm số đó cũng nghịch biến trên khoảng $(-20\pi ; -19\pi)$.

- $(-9\pi ; -8\pi) = (-\pi - 8\pi ; 0 - 8\pi)$.

Do hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi ; 0)$ nên hàm số đó cũng đồng biến trên khoảng $(-9\pi ; -8\pi)$.

Vấn đề 3. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số

Ví dụ 4 Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số:

a) $y = \sin x \cdot \cos x$; b) $y = \tan x + \cot x$; c) $y = \sin^2 x$.

Giải

a) Hàm số $y = f(x) = \sin x \cdot \cos x$ là hàm số lẻ vì:

- Tập xác định là $D = \mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $-x \in \mathbb{R}$ và $f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-x) = -(\sin x \cdot \cos x) = -f(x)$.

b) Hàm số $y = g(x) = \tan x + \cot x$ là hàm số lẻ vì:

- Tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\dfrac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $g(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = -(\tan x + \cot x) = -g(x)$.

c) Hàm số $y = h(x) = \sin^2 x$ là hàm số chẵn vì:

- Tập xác định là $D = \mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $-x \in \mathbb{R}$ và $h(-x) = \sin^2(-x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = h(x)$.

Vấn đề 4. Ứng dụng

Ví dụ 5 Một dao động điều hòa có phương trình li độ dao động là: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là li độ dao động đều được tính bằng centimét, $\omega > 0$. Khi đó, chu kì T của dao động là $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Xác định giá trị của li độ khi $t = 0$, $t = \dfrac{T}{4}$, $t = \dfrac{T}{2}$, $t = \dfrac{3T}{4}$, $t = T$ và vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hòa trên đoạn $[0 ; 2T]$ trong trường hợp:

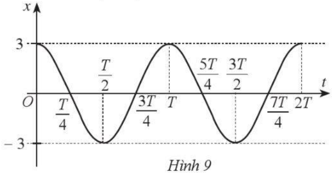
a) $A = 3$ cm, $\varphi = 0$; b) $A = 3$ cm, $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$; c) $A = 3$ cm, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Giải

a) Khi $A = 3$ cm, $\varphi = 0$, ta có: $x = 3\cos(\omega t) = 3\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$.

Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở *Hình 9*:

t	0	$\dfrac{T}{4}$	$\dfrac{T}{2}$	$\dfrac{3T}{4}$	T
x	3	0	-3	0	3

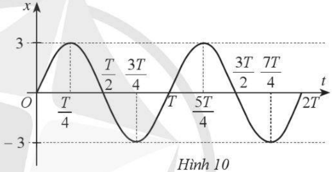


Hình 9

b) Khi $A = 3$ cm, $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$, ta có: $x = 3\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở *Hình 10*:

t	0	$\dfrac{T}{4}$	$\dfrac{T}{2}$	$\dfrac{3T}{4}$	T
x	0	3	0	-3	0

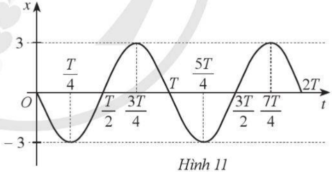


Hình 10

c) Khi $A = 3$ cm, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, ta có: $x = 3\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở *Hình 11*:

t	0	$\dfrac{T}{4}$	$\dfrac{T}{2}$	$\dfrac{3T}{4}$	T
x	0	-3	0	3	0



Hình 11

C. BÀI TẬP

31. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1 + \cos 2x}$ là:

A. $\varnothing$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $[-1; +\infty)$. **D.** $\left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

32. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \sin x}}$ là:

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\varnothing$. **C.** $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

33. Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ là:

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

34. Tập xác định của hàm số $y=\tan x+\dfrac{1}{1+\cot^2 x}$ là:

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{k\dfrac{\pi}{2} \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

35. Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

A. $y=-2\cos x$.

B. $y=-2\sin x$.

C. $y=\tan x-\cos x$.

D. $y=-2\sin x+2$.

36. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A. $y=\cos x+5$.

B. $y=\tan x+\cot x$.

C. $y=\sin(-x)$.

D. $y=\sin x-\cos x$.

37. Hàm số $y=\cos x$ nghịch biến trên khoảng:

A. $(0\,;\pi)$. **B.** $(\pi\,;2\pi)$. **C.** $\left(-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right)$. **D.** $(-\pi\,;0)$.

38. Hàm số nào trong các hàm số sau đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right)$?

A. $y=\sin x$. **B.** $y=\cos x$. **C.** $y=\tan x$. **D.** $y=\cot x$.

39. Hàm số $y=\sin x$ đồng biến trên khoảng:

A. $\left(\dfrac{9\pi}{2}\,;\dfrac{11\pi}{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{11\pi}{2}\,;\dfrac{13\pi}{2}\right)$. **C.** $(10\pi\,;11\pi)$. **D.** $(9\pi\,;10\pi)$.

40. Số giá trị $\alpha\in[-\pi\,;2\pi]$ sao cho $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

41. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y=\sqrt{1+\sin 3x}$; b) $y=\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$; c) $y=\dfrac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sin x}$;

d) $y = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$; e) $y = \dfrac{1}{1 + \sin x \cos x}$; g) $y = \sqrt{\cos x - 1}$.

42. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số:

a) $y = \sin 2x$; b) $y = |\sin x|$; c) $y = \tan^2 x$;

d) $y = \sqrt{1 - \cos x}$; e) $y = \tan x + \cot x$; g) $y = \sin x \cdot \cos 3x$.

43. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

a) $y = 3\sin x + 5$; b) $y = \sqrt{1 + \cos 2x} + 3$;

c) $y = 4 - 2\sin x\cos x$; d) $y = \dfrac{1}{4 - \sin x}$.

44. Xét sự biến thiên của mỗi hàm số sau trên các khoảng tương ứng:

a) $y = \sin x$ trên khoảng $\left(-\dfrac{19\pi}{2}; -\dfrac{17\pi}{2}\right), \left(-\dfrac{13\pi}{2}; -\dfrac{11\pi}{2}\right)$;

b) $y = \cos x$ trên khoảng $(19\pi; 20\pi)$, $(-30\pi; -29\pi)$.

45. Từ đồ thị hàm số $y = \cos x$, cho biết:

a) Có bao nhiêu giá trị của x trên đoạn $[-5\pi; 0]$ để $\cos x = 1$;

b) Có bao nhiêu giá trị của x trên khoảng $\left(-\dfrac{9\pi}{2}; -\dfrac{3\pi}{2}\right)$ để $\cos x = 0$.

46. Từ đồ thị hàm số $y = \sin x$, tìm:

a) Các giá trị của x để $\sin x = \dfrac{1}{2}$;

b) Các khoảng giá trị của x để hàm số $y = \sin x$ nhận giá trị dương.

47. Một vòng quay trò chơi có bán kính 57 m, trục quay cách mặt đất 57,5 m, quay đều mỗi vòng hết 15 phút. Khi vòng quay quay đều, khoảng cách h (m) từ một cabin gắn tại điểm A của vòng quay đến mặt đất được tính bởi công thức:

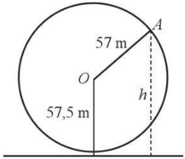
$$h(t) = 57\sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 57,5$$

với t là thời gian quay của vòng quay tính bằng phút ($t \geq 0$) (*Hình 12*).

a) Tính chu kì của hàm số $h(t)$?

b) Khi $t = 0$ (phút) thì khoảng cách từ cabin đến mặt đất bằng bao nhiêu?

c) Khi quay một vòng lần thứ nhất tính từ thời điểm $t = 0$ (phút), tại thời điểm nào của t thì cabin ở vị trí cao nhất? Ở vị trí đạt được chiều cao là 86 m?



Hình 12

§4 PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình $\sin x = m$ (1)

• Với $|m| > 1$, phương trình (1) vô nghiệm.

• Với $|m| \le 1$, gọi α là số thực thuộc đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin\alpha = m$.

Khi đó, ta có: $\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Chú ý

– Ta có một số trường hợp đặc biệt sau của phương trình $\sin x = m$:

+) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

+) $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

+) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

– Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\sin x = \sin a^{\circ}$ như sau:

$$\sin x = \sin a^{\circ} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a^{\circ} + k360^{\circ} \\ x = 180^{\circ} - a^{\circ} + k360^{\circ} \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z}).$$

2. Phương trình $\cos x = m$ (2)

• Với $|m| > 1$, phương trình (2) vô nghiệm.

• Với $|m| \le 1$, gọi α là số thực thuộc đoạn $[0 ; \pi]$ sao cho $\cos\alpha = m$.

Khi đó, ta có: $\cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Chú ý

– Ta có một số trường hợp đặc biệt sau của phương trình $\cos x = m$:

+) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

+) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

+) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

– Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\cos x = \cos a^{o}$ như sau:

$$\cos x = \cos a^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = -\ a^\circ + k360^\circ \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z}).$$

3. Phương trình $\tan x = m$ (3)

Gọi α là số thực thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan \alpha = m$.

Khi đó với mọi $m \in \mathbb{R}$, ta có: $\tan x = m \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

4. Phương trình $\cot x = m$ (4)

Gọi α là số thực thuộc khoảng $(0 ; \pi)$ sao cho $\cot \alpha = m$.

Khi đó với mọi $m \in \mathbb{R}$, ta có: $\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Giải phương trình lượng giác cơ bản

Ví dụ 1 Giải phương trình:

a) $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $\cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

c) $\tan\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

d) $\sqrt{3}\cot\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -1$.

Giải

a) Do $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ nên $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \dfrac{\pi}{3} = \pi - \left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Do $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ nên $\cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k4\pi \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + k4\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Do $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ nên $\tan\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow 3x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+k\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{36}+k\frac{\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z}).$$

d) $\sqrt{3}\cot\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=-1 \Leftrightarrow \cot\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Do $\cot\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ nên $\cot\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cot\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\cot\frac{2\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Vấn đề 2. Tìm nghiệm của phương trình thoả mãn điều kiện cho trước

Ví dụ 2 Tìm nghiệm của phương trình:

a) $\sin\left(2x+\frac{2\pi}{5}\right)=0$ với $x\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$; b) $\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-1$ với $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Giải

a) $\sin\left(2x+\frac{2\pi}{5}\right)=0 \Leftrightarrow 2x+\frac{2\pi}{5}=k\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{5}+k\frac{\pi}{2}$.

Do $x\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ nên $\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{5}+k\frac{\pi}{2}<\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{7}{5}<k<\frac{17}{5}$.

Mà $k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{2;3\}$. Vậy $x\in\left\{\frac{4\pi}{5};\frac{13\pi}{10}\right\}$.

b) $\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-1 \Leftrightarrow \frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{4}+k\pi \Leftrightarrow x=-\frac{5\pi}{6}+k2\pi$.

Do $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ nên $-\frac{\pi}{2}<-\frac{5\pi}{6}+k2\pi<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{6}<k<\frac{2}{3}$.

Mà $k\in\mathbb{Z}$ nên không có giá trị nào của k thoả mãn. Vậy phương trình không có nghiệm trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Vấn đề 3. Phương trình đưa về dạng phương trình lượng giác cơ bản

Phương pháp:

• $\sin f(x)=\sin g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x)+k2\pi \\ f(x)=\pi-g(x)+k2\pi \end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

• $\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Ví dụ 3 Giải phương trình:

a) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$; b) $\sin 2x = \cos 3x$; c) $\cos^2 2x = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Giải

a) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{4} = x + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \pi - x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

b) $\sin 2x = \cos 3x$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} - 3x + k2\pi \\ 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

c) $\cos^2 2x = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{1 + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

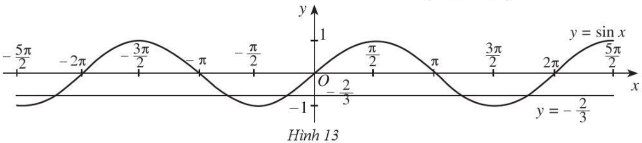
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = 2x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 4x = -\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vấn đề 4. Sử dụng đồ thị hàm số lượng giác để xác định số nghiệm của phương trình lượng giác trên một tập hợp cho trước

Ví dụ 4 Dùng đồ thị hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ để xác định số nghiệm của phương trình: $3\sin x + 2 = 0$ trên khoảng $\left(-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$.

Giải

Vẽ đồ thị hai hàm số $y = \sin x$ và $y = -\frac{2}{3}$ trên khoảng $\left(-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$ (*Hình 13*):

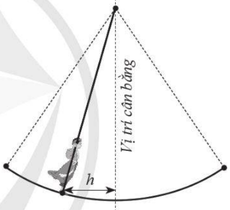


Hình 13

Số nghiệm của phương trình $3\sin x + 2 = 0$ hay $\sin x = -\frac{2}{3}$ trên khoảng $\left(-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên khoảng $\left(-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$ và đường thẳng $y = -\frac{2}{3}$. Dựa vào đồ thị, đường thẳng $y = -\frac{2}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên khoảng $\left(-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$ tại 5 điểm phân biệt nên phương trình $3\sin x + 2 = 0$ có 5 nghiệm phân biệt trên khoảng $\left(-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$.

Vấn đề 5. Ứng dụng

Ví dụ 5 Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (*Hình 14*). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (m) từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian t (s) (với $t \geq 0$) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại. Vào thời gian t nào thì khoảng cách h là 3 m; 0 m?



Hình 14

Giải

Do $-1 \leq \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] \leq 1$ nên $-3 \leq 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] \leq 3$ hay $-3 \leq d \leq 3$. Do đó, $0 \leq |d| \leq 3$.

Vậy $h = 3$ khi $|d| = 3$ hay $\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \pm 1 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1) = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{1+3k}{2} \text{ với } k \in \mathbb{Z}, k \geq 0;$$

$h = 0$ khi $|d| = 0$ hay $\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\Leftrightarrow t = \frac{5+6k}{4} \text{ với } k \in \mathbb{Z}, k \geq 0.$$

C. BÀI TẬP

48. Phương trình $\sin x = 1$ có các nghiệm là:

A. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \pi + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

49. Số nghiệm của phương trình $\sin x = 0,3$ trên khoảng $(0 \ ; \ 4\pi)$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

50. Phương trình $\cos x = -\frac{1}{2}$ có các nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$.

B. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$.

D. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$.

51. Giá trị của m để phương trình $\cos x = m$ có nghiệm trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} \ ; \ \frac{\pi}{2}\right)$ là:

A. $0 \leq m < 1$. **B.** $0 \leq m \leq 1$. **C.** $0 < m \leq 1$. **D.** $0 < m < 1$.

52. Phương trình $\tan x = -1$ có các nghiệm là:

A. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

53. Phương trình $\cot x = 0$ có các nghiệm là:

A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

54. Phương trình $\sin x - \cos x = 0$ có các nghiệm là:

A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

55. Phương trình $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$ có các nghiệm là:

A. $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.　　**B.** $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.　　**D.** $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

56. Phương trình $\cos 2x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ có các nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.　　**B.** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.　　**D.** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

57. Phương trình $\sin 3x = \cos x$ có các nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.　　**B.** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.　　**D.** $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

58. Giải phương trình:

a) $\sin 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;　　b) $\sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;　　c) $\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$;

d) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$;　　e) $\sqrt{3}\tan x - 1 = 0$;　　g) $\cot\left(x + \dfrac{\pi}{5}\right) = 1$.

59. Tìm góc lượng giác x sao cho:

a) $\sin 2x = \sin 42^\circ$;　　b) $\sin(x - 60^\circ) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;　　c) $\cos(x + 50^\circ) = \dfrac{1}{2}$;

d) $\cos 2x = \cos(3x + 10^\circ)$;　　e) $\tan x = \tan 25^\circ$;　　g) $\cot x = \cot(-32^\circ)$.

60. Giải phương trình:

a) $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$;

b) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$;

c*) $\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$;

d*) $\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$;

e) $\cos x+\sin x=0$;

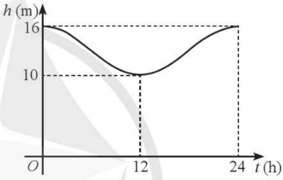
g) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$.

61. Dùng đồ thị hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ để xác định số nghiệm của phương trình:

a) $5\sin x - 3 = 0$ trên đoạn $[-\pi ; 4\pi]$;

b) $\sqrt{2}\cos x+1=0$ trên khoảng $(-4\pi ; 0)$.

62. Mực nước cao nhất tại một cảng biển là 16 m khi thủy triều lên cao và sau 12 giờ khi thủy triều xuống thấp thì mực nước thấp nhất là 10 m. Đồ thị ở *Hình 15* mô tả sự thay đổi chiều cao của mực nước tại cảng trong vòng 24 giờ tính từ lúc nửa đêm.



Hình 15

Biết chiều cao của mực nước h (m) theo thời gian t (h) ($0 \le t \le 24$) được cho bởi công thức $h=m+a\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ với m, a là các số thực dương cho trước.

a) Tìm m, a.

b) Tìm thời điểm trong ngày khi chiều cao của mực nước là 11,5 m.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

63. Cho lục giác đều $ABCDEF$ nội tiếp trong đường tròn lượng giác (thứ tự đi từ A đến các đỉnh theo chiều dương). Khi đó, số đo của góc lượng giác (OA, OC) bằng:

A. $\frac{2\pi}{3}+k2\pi$.   **B.** $-\frac{2\pi}{3}+k2\pi$.   **C.** $\frac{\pi}{3}+k2\pi$.   **D.** $-\frac{\pi}{3}+k2\pi$.

64. Cho $\tan\alpha = 2$. Giá trị của biểu thức $A=\frac{3\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ bằng:

65. Giá trị của biểu thức $A = (2\sin x - \cos x)^2 + (2\cos x + \sin x)^2$ bằng:

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

66. Nếu hai góc a và b có $\tan a = \frac{1}{3}$ và $\tan b = \frac{1}{2}$ thì giá trị của $\tan(a-b)$ bằng:

A. $\frac{1}{7}$. **B.** $-\frac{1}{5}$. **C.** $-\frac{1}{7}$. **D.** 1.

67. Nếu $\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$ thì giá trị của biểu thức $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{-3+\sqrt{3}}{12}$. **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{3+\sqrt{3}}{12}$.

68. Phương trình $\cos 2x = 0$ có các nghiệm là:

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$. **D.** $x = k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

69. Phương trình $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ có các nghiệm là:

A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$. **D.** $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

70. Chứng minh mỗi đẳng thức sau là đúng:

a) $\sin 45^\circ . \cos 30^\circ + \cos(-45^\circ) . \sin(-30^\circ) = \sin 15^\circ$; b) $\tan\frac{9\pi}{20} = \dfrac{1+\tan\frac{\pi}{5}}{1-\tan\frac{\pi}{5}}$.

71. Cho $\sin(45^\circ - \alpha) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

a) Chứng minh rằng $\sin^2(45^\circ - \alpha) = \frac{1-\sin 2\alpha}{2}$.

b) Tính $\sin 2\alpha$.

72. Giải phương trình:

a) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$; b) $\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

d) $2\cos\frac{x}{2} + \sqrt{3} = 0$; e) $\sqrt{3}\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$; g) $\cot(3x + \pi) = -1$.

73. Giải phương trình:

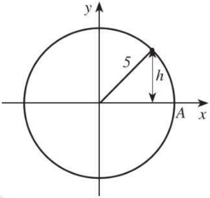
a) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$;

b) $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$;

c) $\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos^2\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$;

d) $\cot 3x=\tan\frac{2\pi}{7}$.

74. Một chất điểm chuyển động đều theo chiều ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn bán kính 5 cm. Khoảng cách h (cm) từ chất điểm đến trục hoành được tính theo công thức $h=|y|$, trong đó $y=a\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)$ với t là thời gian chuyển động của chất điểm tính bằng giây $(t\geq 0)$ và chất điểm bắt đầu chuyển động từ vị trí A (*Hình 16*).



Hình 16

a) Chất điểm chuyển động một vòng hết bao nhiêu giây?

b) Tìm giá trị của a.

c) Tìm thời điểm sao cho chất điểm ở vị trí có $h=2{,}5$ cm và nằm phía dưới trục hoành trong một vòng quay đầu tiên.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

§1 GÓC LƯỢNG GIÁC. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

1. C. **2.** B. **3.** D. **4.** A. **5.** B.

6. $(OA, OB)=\frac{\pi}{3}+k2\pi$; $(OA, OC)=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$; $(OA, OD)=\pi+k2\pi$;

$(OA, OE)=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi$; $(OA, OF)=-\frac{\pi}{3}+k2\pi$.

7. $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\cot\alpha=-2\sqrt{2}$.

8. Ta có: $\tan x=\frac{1}{\cot x}=-\frac{1}{3}$. Áp dụng công thức: $1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$, ta được $\sin^2 x=\frac{1}{10}$. Mà $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ nên $\sin x>0$. Suy ra $\sin x=\frac{\sqrt{10}}{10}$. Khi đó $\cos x=\cot x\,.\,\sin x=-3\,.\,\frac{\sqrt{10}}{10}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

9*. Ta có:

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$$= 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x.$$

b) $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$= 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x.$$

10. a) Vì $\tan x$ xác định nên $\cos x$ khác 0. Chia cả tử và mẫu cho $\cos x$, ta được:

$$A = \frac{3\sin x - 5\cos x}{4\sin x + \cos x} = \frac{3\tan x - 5}{4\tan x + 1} = \frac{3\,.\,(-2) - 5}{4\,.\,(-2) + 1} = \frac{11}{7}.$$

b) Vì $\tan x$ xác định nên $\cos^2 x$ khác 0. Chia cả tử và mẫu cho $\cos^2 x$, ta được:

$$B = \frac{2\sin^2 x - 3\sin x\cos x - \cos^2 x}{\sin^2 x + \sin x\cos x} = \frac{2\tan^2 x - 3\tan x - 1}{\tan^2 x + \tan x} = \frac{13}{2}.$$

11. a) Do $\cos\frac{7\pi}{8} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = -\cos\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{5\pi}{8} = \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) = -\cos\frac{3\pi}{8}$ nên

$$A = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8} = 2\left(\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$= 2\left[\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}\right)\right] = 2\left(\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8}\right) = 2.$$

b) Nhận thấy: $\sin\frac{9\pi}{5} = \sin\left(-\frac{\pi}{5} + 2\pi\right) = -\sin\frac{\pi}{5}$ nên $\sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{9\pi}{5} = 0$.

Tương tự ta có: $\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{8\pi}{5} = 0$, $\sin\frac{3\pi}{5} + \sin\frac{7\pi}{5} = 0$, $\sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{6\pi}{5} = 0$.

Suy ra $B = \sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{2\pi}{5} + \ldots + \sin\frac{9\pi}{5} = 0 + \sin\frac{5\pi}{5} = 0$.

c) $C = \tan 1^\circ\,.\,\tan 2^\circ\,.\,\tan 3^\circ\,.\,\ldots\,.\,\tan 89^\circ$

$$= (\tan 1^\circ\,.\,\tan 89^\circ)(\tan 2^\circ\,.\,\tan 88^\circ)\ldots(\tan 44^\circ\,.\,\tan 46^\circ)\tan 45^\circ$$

$$= (\tan 1^\circ\,.\,\cot 1^\circ)(\tan 2^\circ\,.\,\cot 2^\circ)\ldots(\tan 44^\circ\,.\,\cot 44^\circ)\tan 45^\circ = 1.$$

12. a) Do $A+C=\pi-B$ nên $\sin B=\sin(A+C)$.

b) Do $A+B+2C=\pi+C$ nên $\cos(A+B+2C)=\cos(\pi+C)=-\cos C$.

c) Do $\dfrac{B+C}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}$ nên $\sin\dfrac{A}{2}=\cos\dfrac{B+C}{2}$.

d) Do $\dfrac{A+B-2C}{2}=\dfrac{A+B+C-3C}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3C}{2}$ nên $\tan\dfrac{A+B-2C}{2}=\cot\dfrac{3C}{2}$.

13*. a) Do $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$ nên $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\dfrac{1}{9}$ hay $1+2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{9}$.

Suy ra $A=\sin\alpha\,.\,\cos\alpha=-\dfrac{4}{9}$.

b) Xét $B^2=(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1+\dfrac{8}{9}=\dfrac{17}{9}$. Do $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$ nên $\sin\alpha<0,\ \cos\alpha>0$. Do đó $B=\sin\alpha-\cos\alpha<0$. Vậy $B=-\dfrac{\sqrt{17}}{3}$.

c) $C=\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^3-3\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)=\dfrac{13}{27}$.

d) Ta có: $D=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\dfrac{49}{81}$.

14. Do vòng quay Mặt Trời quay mỗi vòng khoảng 15 phút và chuyển động theo chiều kim đồng hồ nên sau 15 phút, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng -2π (rad).

Do đó, sau 10 phút, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng $\dfrac{-2\pi}{15}\,.\,10=\dfrac{-4\pi}{3}$ (rad).

§2 CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

15. A. **16. A**. **17. D**. **18. B**. **19. A**. **20. C**. **21. A**. **22. D**. **23. C**. **24. C**.

25. a) $\cos a=-\dfrac{\sqrt{5}}{3},\ \tan a=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

b) $\sin\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{10}}{6},\ \cos\left(a-\dfrac{5\pi}{6}\right)=\dfrac{2+\sqrt{15}}{6},\tan\left(a+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{8\sqrt{5}+9\sqrt{3}}{7}$.

c) $\sin 2a = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$, $\cos 2a = \frac{1}{9}$.

26. Do $\pi < a < 2\pi$ nên $\frac{\pi}{2} < \frac{a}{2} < \pi$. Suy ra, $\sin\frac{a}{2} > 0$, $\cos\frac{a}{2} < 0$.

Ta có: $\sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1-\cos a}{2} = 0,4$.

Vậy $\sin\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{10}}{5}$, $\cos\frac{a}{2} = -\frac{\sqrt{15}}{5}$, $\tan\frac{a}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$.

27. Ta có: $\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = \frac{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{\sin^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{a}{2}} = \frac{2\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$$\cos a = \cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2} = \frac{\cos^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{a}{2}}{\sin^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{a}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}} = \frac{1}{3}.$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = 2\sqrt{2}.$$

28. Ta có: $\cos(a+2b) = 2\cos a \Leftrightarrow \cos[(a+b)+b] = 2\cos[(a+b)-b]$

$$\Leftrightarrow 3\sin(a+b)\,.\,\sin b = -\cos(a+b)\,.\,\cos b \Leftrightarrow \tan(a+b)\tan b = \frac{-1}{3}.$$

29*. a) Do $A+B = \pi - C$ nên $\tan(A+B) = -\tan C \Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1-\tan A\tan B} = -\tan C$

$$\Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A\,.\,\tan B\,.\,\tan C.$$

b) Do $\frac{A}{2}+\frac{B}{2} = \frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$ nên $\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2} \Leftrightarrow \frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\,.\,\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\,.\,\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\,.\,\tan\frac{A}{2} = 1.$$

30. a) Trong tam giác vuông ABM, $\tan\widehat{BAM} = \frac{BM}{BA} = \frac{1}{2}$.

Trong tam giác vuông ADN, $\tan\widehat{DAN} = \frac{DN}{DA} = \frac{1}{3}$.

Do đó, $\tan(\widehat{BAM}+\widehat{DAN})=\dfrac{\tan\widehat{BAM}+\tan\widehat{DAN}}{1-\tan\widehat{BAM}\tan\widehat{DAN}}=\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}}=1.$

b) Do $\tan(\widehat{BAM}+\widehat{DAN})=1$ nên $\widehat{BAM}+\widehat{DAN}=45^{\circ}$.

Suy ra $\widehat{MAN}=90°-(\widehat{BAM}+\widehat{DAN})=45°$.

Vậy góc chiếu sáng của đèn pin bằng 45°.

§3 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ

31. B. **32.** C. **33.** C. **34.** A. **35.** B. **36.** A. **37.** A. **38.** C. **39.** B. **40.** C.

41. a) $\mathbb{R}$. b) $\mathbb{R}\setminus\{k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$. c) $\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

d) $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. e) $\mathbb{R}$. g) $\{k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

42. a) Hàm số lẻ. b) Hàm số chẵn. c) Hàm số chẵn.

d) Hàm số chẵn. e) Hàm số lẻ. g) Hàm số lẻ.

43. a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $\forall x\in\mathbb{R}$ thì $-1\le\sin x\le 1$. Do đó, $2\le 3\sin x+5\le 8$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 8 khi $\sin x=1$ hay $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$);

giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2 khi $\sin x=-1$ hay $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$).

b) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng $3+\sqrt{2}$ khi $\cos 2x=1$ hay $x=k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$);

giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 3 khi $\cos 2x=-1$ hay $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$).

c) Ta có: $y=4-2\sin x\,.\,\cos x=4-\sin 2x$.

Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 5 khi $\sin 2x=-1$ hay $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$); giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 3 khi $\sin 2x=1$ hay $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$).

d) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\dfrac{1}{3}$ khi $\sin x=1$ hay $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$);

giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $\dfrac{1}{5}$ khi $\sin x=-1$ hay $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$).

44. a) Hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{19\pi}{2}; -\dfrac{17\pi}{2}\right)$; đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{13\pi}{2}; -\dfrac{11\pi}{2}\right)$.

b) Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(19\pi ; 20\pi)$; nghịch biến trên khoảng $(-30\pi ; -29\pi)$.

45. a) 3 giá trị. b) 2 giá trị.

46. a) Giá trị của x để $\sin x = \dfrac{1}{2}$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sin x$ và đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}$. Dựa vào đồ thị, ta có $\sin x = \dfrac{1}{2}$ khi $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

b) Hàm số $y = \sin x$ nhận giá trị dương tương ứng với phần đồ thị hàm số đó nằm phía trên trục hoành. Dựa vào đồ thị, ta có hàm số $y = \sin x$ nhận giá trị dương khi $x \in (k2\pi ; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

47. a) Vì vòng quay trò chơi quay mỗi vòng hết 15 phút nên chu kì của hàm số $h(t)$ bằng 15 phút.

b) Khi $t = 0$ thì $h = 57\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + 57,5 = 0,5$ (m). Vậy khi đó khoảng cách từ cabin đến mặt đất bằng 0,5 m.

c) Khi quay một vòng, cabin ở vị trí cao nhất khi $\sin\left(\dfrac{2\pi}{15}t - \dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ hay $t = 7,5$ (phút); cabin đạt được chiều cao là 86 m lần đầu tiên khi $t = 5$ (phút).

§4 PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

48. A. **49.** C. **50.** D. **51.** C. **52.** B. **53.** D. **54.** A. **55.** A. **56.** B. **57.** A.

58. a) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{9} + k\dfrac{2\pi}{3} \\ x = \dfrac{2\pi}{9} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) $\left[\begin{array}{l} x = -\pi + k4\pi \\ x = 2\pi + k4\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

c) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{9} + k\dfrac{2\pi}{3} \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

d) $x = \pm\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

e) $x=\frac{\pi}{6}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

g) $x=\frac{\pi}{20}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

59. a) $\left[\begin{array}{l}x=21^\circ+k180^\circ\\x=69^\circ+k180^\circ\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

b) $\left[\begin{array}{l}x=k360^\circ\\x=-60^\circ+k360^\circ\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

c) $\left[\begin{array}{l}x=10^\circ+k360^\circ\\x=-110^\circ+k360^\circ\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

d) $\left[\begin{array}{l}x=-10^\circ+k360^\circ\\x=-2^\circ+k72^\circ\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

e) $x=25^\circ+k180^\circ\ (k\in\mathbb{Z})$.

g) $x=-32^\circ+k180^\circ\ (k\in\mathbb{Z})$.

60. a) $\left[\begin{array}{l}x=\frac{5\pi}{24}+k\pi\\x=\frac{13\pi}{48}+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

b) $\left[\begin{array}{l}x=\frac{7\pi}{12}+k2\pi\\x=\frac{\pi}{36}+k\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

c*) Sử dụng công thức hạ bậc, ta có:

$$\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2},\ \sin^2\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1-\cos(4x+\pi)}{2}.$$

Khi đó phương trình tương đương

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(4x+\pi)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\x=-\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{3}.\end{array}\right.\text{ hay } x=-\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z}).$$

d*) Sử dụng công thức hạ bậc tương tự như câu c, ta có: $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{3}\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

e) $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

g) $x=\frac{\pi}{3}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

61. a) Số nghiệm của phương trình $5\sin x-3=0$ trên đoạn $[-\pi\,;\,4\pi]$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $[-\pi\,;\,4\pi]$ và đường thẳng $y=\frac{3}{5}$.
Dựa vào đồ thị, phương trình $5\sin x-3=0$ có 4 nghiệm trên đoạn $[-\pi\,;\,4\pi]$.

b) Phương trình $\sqrt{2}\cos x+1=0$ có 4 nghiệm trên khoảng $(-4\pi\,;\,0)$.

61. a) Số nghiệm của phương trình $5\sin x - 3 = 0$ trên đoạn $[-\pi ; 4\pi]$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi ; 4\pi]$ và đường thẳng $y = \frac{3}{5}$.

Dựa vào đồ thị, phương trình $5\sin x - 3 = 0$ có 4 nghiệm trên đoạn $[-\pi ; 4\pi]$.

b) Phương trình $\sqrt{2}\cos x + 1 = 0$ có 4 nghiệm trên khoảng $(-4\pi ; 0)$.

62. a) Chiều cao của mực nước cao nhất là $m + a$ khi $\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = 1$ và thấp nhất bằng $m - a$ khi $\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = -1$. Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases} m + a = 16 \\ m - a = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 13 \\ a = 3. \end{cases}$

b) Từ câu a ta có công thức: $h = 13 + 3\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$. Do chiều cao của mực nước là 11,5 m nên $13 + 3\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = 11,5 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{12}t = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{\pi}{12}t = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 8 + 24k \\ t = -8 + 24k \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Ứng với hai thời điểm trong ngày ta có $t = 8$ (h) và $t = 16$ (h).

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

63. A. **64.** C. **65.** A. **66.** C. **67.** B. **68.** C. **69.** B.

70. a) Ta có: $\sin 45^\circ.\cos 30^\circ + \cos(-45^\circ).\sin(-30^\circ)$

$$= \sin 45^\circ.\cos 30^\circ - \cos 45^\circ.\sin 30^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 15^\circ.$$

b) Ta có: $\tan\frac{9\pi}{20} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{5}\right) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{5}}{1 - \tan\frac{\pi}{4}.\tan\frac{\pi}{5}} = \dfrac{1 + \tan\frac{\pi}{5}}{1 - \tan\frac{\pi}{5}}$.

71. a) $\sin^2(45^\circ - \alpha) = \frac{1 - \cos(90^\circ - 2\alpha)}{2} = \frac{1 - \sin 2\alpha}{2}$. b) $\sin 2\alpha = \frac{3}{4}$.

72. a) $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$. b) $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k6\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k6\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

73. a) $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{2\pi}{5} \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$. b) $\left[\begin{array}{l} x=k\dfrac{2\pi}{3} \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

c) Sử dụng công thức hạ bậc ta có:

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos^2\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\frac{1+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{2}=\frac{1+\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}$$

$$\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi \\ x=-\dfrac{5\pi}{24}+k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).$$

d) $x=\dfrac{\pi}{14}+k\dfrac{\pi}{3}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

74. a) Xét $h=0$ hay $a\sin\left(\dfrac{\pi}{5}t\right)=0\Leftrightarrow t=5k$ với $k\in\mathbb{Z}$ và $k\geq 0$.

Ta nhận thấy, từ thời điểm ban đầu, cứ sau 5 giây, khoảng cách từ chất điểm đến trục hoành lại bằng 0. Suy ra sau mỗi 5 giây, chất điểm chuyển động được nửa vòng. Vậy chất điểm chuyển động một vòng hết 10 giây.

b) Do chất điểm chuyển động một vòng hết 10 giây nên khi $t=2{,}5$ giây thì chất điểm chuyển động được một phần tư vòng theo chiều dương, suy ra tại $t=2{,}5$ ta có $y=|y|=h=5\Leftrightarrow a\sin\left(\dfrac{\pi}{5}.\dfrac{5}{2}\right)=5\Leftrightarrow a=5$.

c) Từ kết quả câu b, ta có: $y=5\sin\left(\dfrac{\pi}{5}t\right)$. Do $h=2{,}5$ cm và chất điểm nằm ở dưới trục hoành nên $y=-2{,}5$. Với $y=-2{,}5$, ta có:

$$5\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)=-2{,}5\Leftrightarrow\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{5}t=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ \dfrac{\pi}{5}t=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-5+60k}{6} \\ t=\dfrac{35+60k}{6} \end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Với vòng quay đầu tiên thì $0\leq t\leq 10$, do đó $t=\dfrac{35}{6}$, $t=\dfrac{55}{6}$.

Vậy tại thời điểm $t=\dfrac{35}{6}$ giây, $t=\dfrac{55}{6}$ giây thì chất điểm ở vị trí có $h=2{,}5$ cm và nằm ở dưới trục hoành.

Chương II

DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§1 DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Dãy số hữu hạn

Mỗi hàm số u: $\{1; 2; 3; \ldots; m\} \to \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{N}^*$) được gọi là một *dãy số hữu hạn*.

• Dạng khai triển: $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$.

• Số u_1 gọi là *số hạng đầu*, số u_m gọi là *số hạng cuối* của dãy số.

2. Dãy số vô hạn

Mỗi hàm số u: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ được gọi là một *dãy số vô hạn* (gọi tắt là *dãy số*).

• Dạng khai triển: $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$

• Dãy số *đó* còn được viết tắt là (u_n).

• Số u_1 gọi là *số hạng thứ nhất* (hay *số hạng đầu*), số u_2 gọi là *số hạng thứ hai*, …, số u_n gọi là *số hạng thứ n* và là *số hạng tổng quát* của dãy số.

3. Cách cho một dãy số

Ta có thể cho dãy số bằng một trong những cách sau:

• Liệt kê các số hạng của dãy số (với những dãy số hữu hạn và có ít số hạng).

• Diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hạng của dãy số.

• Cho công thức của số hạng tổng quát của dãy số.

• Cho bằng phương pháp truy hồi.

4. Dãy số tăng, dãy số giảm

• Dãy số (u_n) được gọi là *dãy số tăng* nếu $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

• Dãy số (u_n) được gọi là *dãy số giảm* nếu $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Dãy số bị chặn

- Dãy số (u_n) được gọi là *bị chặn trên* nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là *bị chặn dưới* nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \geq m$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là *bị chặn* nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới; tức là tồn tại các số m và M sao cho $m \leq u_n \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Xác định các số hạng của dãy số

Ví dụ 1 Viết năm số hạng đầu của mỗi dãy số có số hạng tổng quát u_n cho bởi công thức sau:

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n-1}$; b) $u_n = \dfrac{2^n}{n}$;

Giải

a) Năm số hạng đầu của dãy số (u_n) là: $-1; \dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{5}; \dfrac{1}{7}; -\dfrac{1}{9}$.

b) Năm số hạng đầu của dãy số (u_n) là: $2; 2; \dfrac{8}{3}; 4; \dfrac{32}{5}$.

Vấn đề 2. Xét tính tăng, giảm của dãy số

Phương pháp:

Cách 1: Xét hiệu: $H = u_{n+1} - u_n$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

- Nếu $H > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $H < 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số (u_n) là dãy số giảm.

Cách 2: Nếu $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì ta xét thương: $T = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

- Nếu $T > 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $T < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số (u_n) là dãy số giảm.

Ví dụ 2 Xét tính tăng, giảm của mỗi dãy số (u_n), biết:

a) $u_n = \dfrac{n-3}{n+2}$; b) $u_n = \dfrac{3^n}{2^n \cdot n!}$; c) $u_n = (-1)^n \cdot (2^n + 1)$.

Giải

a) Ta có: $u_n = \dfrac{n-3}{n+2} = \dfrac{(n+2)-5}{n+2} = 1 - \dfrac{5}{n+2}$.

Xét $u_{n+1} - u_n = \left(1 - \dfrac{5}{n+3}\right) - \left(1 - \dfrac{5}{n+2}\right) = \dfrac{5}{n+2} - \dfrac{5}{n+3} = \dfrac{5}{(n+2)(n+3)} > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Do đó, $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

b) Nhận xét: $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Xét $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!} : \dfrac{3^n}{2^n n!} = \dfrac{3}{2(n+1)} \leq \dfrac{3}{4} < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó, $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm.

c) Ta có: $u_1 = -3$; $u_2 = 5$; $u_3 = -9$; ..... Do đó, $u_1 < u_2$; $u_2 > u_3$. Vậy dãy số (u_n) không là dãy số tăng, không là dãy số giảm.

Vấn đề 3. Xét tính bị chặn của dãy số

Ví dụ 3 Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n^2+n}$ bị chặn.

Giải

Ta có: $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy số (u_n) bị chặn dưới. Do $n^2 + n \geq 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên $u_n \leq \dfrac{1}{2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra dãy số (u_n) bị chặn trên. Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

Vấn đề 4. Ứng dụng

Ví dụ 4 Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo hình thức lãi kép như sau: Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0,5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau *n* tháng.

a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.

b) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.

c) Dự đoán công thức của P_n.

Giải

a) Số tiền cả gốc và lãi chị Mai có được sau 1 tháng (khi chưa gửi thêm 6 triệu đồng) là: $100 + 100 \cdot \dfrac{0,5}{100} = 100 \cdot 1,005 = 100,5$ (triệu đồng).

Số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng là: 100,5 + 6 = 106,5 (triệu đồng).

b) Số tiền chị Mai có trong ngân hàng sau 2 tháng là:

106,5 . 1,005 + 6 = 113,0325 (triệu đồng).

Số tiền chị Mai có trong ngân hàng sau 3 tháng là:

113,0325 . 1,005 + 6 = 119,5976625 (triệu đồng).

c) Ta có: $P_1 = 100 \,.\, 1{,}005 + 6$;

$P_2 = P_1 \,.\, 1{,}005 + 6 = (100 \,.\, 1{,}005 + 6) \,.\, 1{,}005 + 6 = 100 \,.\, 1{,}005^2 + 6 \,.\, 1{,}005 + 6$;

$P_3 = P_2 \,.\, 1{,}005 + 6 = (100 \,.\, 1{,}005^2 + 6 \,.\, 1{,}005 + 6) \,.\, 1{,}005 + 6$

$= 100 \,.\, 1{,}005^3 + 6 \,.\, 1{,}005^2 + 6 \,.\, 1{,}005 + 6; ...;$

Cứ như thế, ta dự đoán được công thức của P_n:

$P_n = 100 \,.\, 1{,}005^n + 6 \,.\, 1{,}005^{n-1} + 6 \,.\, 1{,}005^{n-2} + ... + 6$

$= 100 \,.\, 1{,}005^n + 6 \,.\, (1{,}005^{n-1} + 1{,}005^{n-2} + ... + 1)$.

C. BÀI TẬP

1. Cho dãy số (u_n) biết $u_1 = 2$ và $u_n = \dfrac{u_{n-1}+1}{2}$ với mọi $n \geq 2$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số lần lượt là:

A. $2; 1; \dfrac{3}{2}$. **B.** $2; \dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2}$. **C.** $2; \dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{4}$. **D.** $2; \dfrac{3}{2}; 2$.

2. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2+2}$. Số hạng u_{10} là:

A. $\dfrac{19}{12}$. **B.** $\dfrac{33}{34}$. **C.** $\dfrac{199}{102}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

3. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{n+1}{3n-2}$. Với $u_k = \dfrac{8}{19}$ là số hạng của dãy số thì k bằng:

A. 8. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 6.

4. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = 3^n$. Số hạng u_{n+1} bằng:

A. $3^n \,.\, 3$. **B.** $3^n + 3$. **C.** $3^n + 1$. **D.** $3(n + 1)$.

5. Trong các dãy số (u_n) được xác định như sau, dãy số giảm là:

A. $u_n = \dfrac{3n-1}{n+1}$. **B.** $u_n = n^3$. **C.** $u_n = \dfrac{1}{3^{n+1}}$. **D.** $u_n = \sqrt{n}$.

6. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \cos n$. Dãy số (u_n) là:

A. Dãy số tăng. **B.** Dãy số giảm.

C. Dãy số bị chặn. **D.** Dãy số bị chặn dưới, không bị chặn trên.

7. Tính tổng 6 số hạng đầu của dãy số (u_n), biết $u_n = 3n - 1$.

8. Cho dãy số (u_n) biết $u_1 = 2$ và $u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}^2}$ với mọi $n \geq 2$. Viết năm số hạng đầu của dãy số và dự đoán công thức của số hạng tổng quát u_n.

9. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{2x^2+1}$ có đồ thị (C). Với mỗi số nguyên dương n, gọi A_n là giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $x = n$. Xét dãy số (u_n), biết u_n là tung độ của điểm A_n. Hãy tìm công thức của số hạng tổng quát u_n.

10. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \sin\left[(2n-1)\dfrac{\pi}{4}\right]$.

a) Viết bốn số hạng đầu của dãy số.

b) Chứng minh rằng $u_{n+4} = u_n$ với mọi $n \geq 1$.

c) Tính tổng 12 số hạng đầu của dãy số.

11. Xét tính tăng, giảm của mỗi dãy số (u_n), biết:

a) $u_n = 2n + 3$; b) $u_n = 3^n - n$; c) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$; d) $u_n = \sin n$.

12. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{an+2}{n+1}$ với a là số thực. Tìm a để dãy số (u_n) là dãy số tăng.

13. Chứng minh rằng:

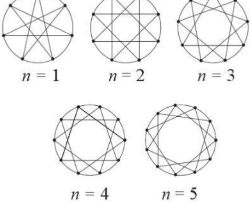
a) Dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n^2+1}$ bị chặn dưới;

b) Dãy số (u_n) với $u_n = -n^2 - n$ bị chặn trên;

c) Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$ bị chặn.

14*. Với mỗi số nguyên dương n, lấy $n + 6$ điểm cách đều nhau trên đường tròn. Nối mỗi điểm với điểm cách nó hai điểm trên đường tròn đó để tạo thành các ngôi sao như *Hình 1*. Gọi u_n là số đo góc ở đỉnh tính theo đơn vị độ của mỗi ngôi sao thì ta được dãy số (u_n).

Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n.



Hình 1

§2 CẤP SỐ CỘNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Dãy số (u_n) là *cấp số cộng* nếu $u_n = u_{n-1} + d$ với $n \geq 2$, d là số không đổi.

Số d gọi là công sai của cấp số cộng, $d = u_n - u_{n-1}$ với $n \geq 2$.

Nếu $d = 0$ thì cấp số cộng là một dãy số không đổi

2. Số hạng tổng quát

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d, ta có:

$$u_n = u_1 + (n-1)d \text{ với } n \geq 2.$$

3. Tổng *n* số hạng đầu của một cấp số cộng

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, ta có:

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2} \text{ hoặc } S_n = \frac{[2u_1 + (n-1)d]n}{2}.$$

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Chứng minh một dãy số là cấp số cộng

Phương pháp: Với dãy số (u_n), chứng minh hiệu $u_n - u_{n-1}$ không đổi với mọi $n \geq 2$.

Ví dụ 1 Trong các dãy số (u_n) với số hạng tổng quát sau, dãy số nào là cấp số cộng? Nếu là cấp số cộng, hãy tìm số hạng đầu u_1 và công sai d.

a) $u_n = 3 - 2n$;

b) $u_n = 3^n$.

Giải

a) Ta có: $u_1 = 3 - 2 \,.\, 1 = 1$; $u_n - u_{n-1} = 3 - 2n - [3 - 2(n-1)] = -2$ với mọi $n \geq 2$.

Vậy dãy số (u_n) đã cho là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = -2$.

b) Ta có: $u_1 = 3$; $u_2 = 9$; $u_3 = 27$; ... Do đó, $u_2 - u_1 = 6$; $u_3 - u_2 = 18$.

Vậy dãy số (u_n) đã cho không là một cấp số cộng.

Vấn đề 2. Xác định số hạng và công sai của cấp số cộng

Ví dụ 2 Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -3$, công sai $d = 5$.

a) Viết công thức của số hạng tổng quát u_n.

b) Số 492 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng trên?

c) Số 300 có là số hạng nào của cấp số cộng trên không?

Giải

a) Ta có: $u_n = u_1 + (n-1)d = -3 + (n-1) . 5 = 5n - 8$.

b) Ta có: $5n - 8 = 492 \Leftrightarrow n = 100$. Vậy số 492 là số hạng thứ 100 của (u_n).

c) Nhận thấy $5n - 8 = 300 \Leftrightarrow n = \dfrac{308}{5} = 61,6 \notin \mathbb{N}^*$. Vậy số 300 không là số hạng nào của (u_n).

Ví dụ 3 Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n), biết $u_5 = 19$, $u_9 = 35$.

Giải

Gọi d là công sai của cấp số cộng. Từ giả thiết, ta có: $\begin{cases} u_1 + 4d = 19 \\ u_1 + 8d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4. \end{cases}$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng đó là $u_1 = 3$ và công sai $d = 4$.

Ví dụ 4 Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = \dfrac{1}{3}$ và $u_1 + u_2 + u_3 = -1$.

Tìm công sai d và viết công thức của số hạng tổng quát u_n.

Giải

Ta có: $u_1 + u_2 + u_3 = -1$ hay $3u_1 + 3d = -1$. Mà $u_1 = \dfrac{1}{3}$ nên $d = -\dfrac{2}{3}$.

Công thức của số hạng tổng quát u_n là: $u_n = \dfrac{1}{3} + (n-1)\left(-\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{2}{3}n + 1$.

Vấn đề 3. Tính tổng *n* số hạng đầu của cấp số cộng

Ví dụ 5 Tính tổng 100 số hạng đầu của dãy số (u_n), biết $u_n = 0,3n + 5$ với mọi $n \geq 1$.

Giải

Ta có: $u_1 = 0,3 . 1 + 5 = 5,3$; $u_n - u_{n-1} = 0,3n + 5 - [0,3(n-1) + 5] = 0,3$ với mọi $n \geq 2$. Vậy dãy số (u_n) đã cho là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 5,3$ và công sai $d = 0,3$.

Vậy tổng 100 số hạng đầu của dãy số đó là:

$$S_{100} = u_1 + u_2 + ... + u_{100} = \frac{(2 . 5,3 + 99 . 0,3) . 100}{2} = 2015.$$

Vấn đề 4. Ứng dụng

Ví dụ 6 Khi kí kết hợp đồng lao động với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau:

Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu đồng. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu đồng.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu đồng. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu đồng.

Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp trên, em nên chọn phương án nào khi:

a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?

b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?

Giải

Ở phương án trả lương thứ nhất, số tiền lương mỗi năm người lao động nhận được lập thành cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 120$, công sai $d = 18$.

Ở phương án trả lương thứ hai, số tiền lương mỗi quý người lao động nhận được lập thành cấp số cộng (v_n) có số hạng đầu $v_1 = 24$, công sai $d' = 1,8$.

a) Nếu kí hợp đồng lao động 3 năm thì:

Tổng số tiền lương người lao động nhận được trong 3 năm ở phương án 1 là tổng 3 số hạng đầu của cấp số cộng và bằng:

$$S_3 = \frac{(2u_1 + 2d) \cdot 3}{2} = 3u_1 + 3d = 3 \cdot 120 + 3 \cdot 18 = 414 \text{ (triệu đồng).}$$

Do 1 năm có 4 quý nên tổng số tiền lương người lao động nhận được trong 3 năm ở phương án 2 là tổng 12 số hạng đầu của cấp số cộng và bằng:

$$S'_{12} = \frac{(2v_1 + 11d') \cdot 12}{2} = 12v_1 + 66d' = 12 \cdot 24 + 66 \cdot 1,8 = 406,8 \text{ (triệu đồng).}$$

Vậy nếu kí hợp đồng lao động 3 năm thì em nên chọn phương án 1.

b) Nếu kí hợp đồng lao động 10 năm thì:

Tổng số tiền lương người lao động nhận được trong 10 năm ở phương án 1 bằng:

$$S_{10} = \frac{(2u_1 + 9d) \cdot 10}{2} = 10u_1 + 45d = 10 \cdot 120 + 45 \cdot 18 = 2\ 010 \text{ (triệu đồng).}$$

Tổng số tiền lương người lao động nhận được trong 10 năm ở phương án 2 bằng:

$$S'_{40} = \frac{(2v_1 + 39d') \cdot 40}{2} = 40v_1 + 780d' = 40 \cdot 24 + 780 \cdot 1,8 = 2\ 364 \text{ (triệu đồng).}$$

Vậy nếu kí hợp đồng lao động 10 năm thì em nên chọn phương án 2.

C. BÀI TẬP

15. Trong các dãy số (u_n) với số hạng tổng quát sau, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n = 3^n$. **B.** $u_n = 1 - 3n$. **C.** $u_n = 3^n + 1$. **D.** $u_n = 3 + n^2$.

16. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_1 = \frac{1}{3}$; $u_8 = 26$. Công sai d của cấp số cộng đó là:

A. $\frac{11}{3}$. **B.** $\frac{10}{3}$. **C.** $\frac{3}{10}$. **D.** $\frac{3}{11}$.

17. Viết ba số hạng xen giữa các số 2 và 22 để được một cấp số cộng có năm số hạng. Ba số hạng đó lần lượt là:

A. 7; 12; 17. **B.** 6; 10; 14. **C.** 8; 13; 18. **D.** 6; 12; 18.

18. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_5 + u_7 = 19$. Giá trị của $u_2 + u_{10}$ là:

A. 38. **B.** 29. **C.** 12. **D.** 19.

19. Cho (u_n) là cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 2$, công sai $d = -5$. Tổng 10 số hạng đầu của cấp số cộng đó là:

A. – 410. **B.** – 205. **C.** 245. **D.** – 230.

20. Cho (u_n) là cấp số cộng có $S_n = n^2 + 4n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng đó là:

A. $u_1 = 3, d = 2$. **B.** $u_1 = 5, d = 2$.

C. $u_1 = 8, d = -2$. **D.** $u_1 = -5, d = 2$.

21. Cho ba số $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số a^2, b^2, c^2 theo thứ tự cũng lập thành một cấp số cộng.

22. Tìm x để ba số $10 - 3x$, $2x^2 + 3$, $7 - 4x$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

23. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n), biết:

a) $\begin{cases} u_4 = 10 \\ u_7 = 19; \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17; \end{cases}$ c) $\begin{cases} S_{10} = 165 \\ S_{20} = 630. \end{cases}$

24. Cho (u_n) là cấp số cộng có $u_2 + u_4 = 22$, $u_1 . u_5 = 21$ và công sai d dương.

a) Tính u_{100}, S_{100}. b) Tính tổng: $u_1 + u_5 + u_9 + \ldots + u_{101}$.

25. Tìm năm số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 40 và tổng bình phương của chúng bằng 480.

26. Cho (u_n) là cấp số cộng có $u_1 + u_5 + u_9 + u_{13} + u_{17} + u_{21} = 234$.

a) Tính $u_2 + u_8 + u_{14} + u_{20}$.

b) Tìm u_1, d, biết $u_{10} = 37$.

27*. Cho dãy số (u_n) biết $u_1 = -2$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1-u_n}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Đặt $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

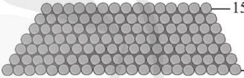
a) Chứng minh rằng dãy số (v_n) là một cấp số cộng. Tìm số hạng đầu, công sai của cấp số cộng đó.

b) Tìm công thức của v_n, u_n tính theo n.

c) Tính tổng $S = \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3} + ... + \dfrac{1}{u_{20}}$.

28. Chuông đồng hồ ở một toà tháp đánh số tiếng đúng bằng số giờ và cứ mỗi 30 phút không phải là giờ đúng thì đánh 1 tiếng chuông. Hỏi bắt đầu từ lúc 1 giờ đêm đến 12 giờ trưa, chuông đồng hồ đó đã đánh tất cả bao nhiêu tiếng?

29. Các khúc gỗ được xếp như *Hình 2*. Lượt thứ nhất có 21 khúc, lượt thứ hai có 20 khúc, ..., lượt trên cùng có 15 khúc. Tính tổng số khúc gỗ đã được xếp.



Hình 2

§3 CẤP SỐ NHÂN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Dãy số (u_n) là *cấp số nhân* nếu $u_n = u_{n-1} \cdot q$ với $n \geq 2$, q là số không đổi.

Số q gọi là công bội của cấp số nhân. Nếu $u_n \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $q = \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ với $n \geq 2$.

Nếu $q = 1$ thì cấp số nhân là một dãy số không đổi.

2. Số hạng tổng quát

Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d, ta có:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \text{ với } n \geq 2.$$

3. Tổng *n* số hạng đầu của một cấp số nhân

Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q $(q \neq 1)$.

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, ta có:

$$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}.$$

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Chứng minh một dãy số là một cấp số nhân

Phương pháp: Với dãy số (u_n), chứng minh $u_n = u_{n-1} \cdot q$ (q không đổi) với mọi $n \geq 2$ hay chứng minh thương $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ không đổi với mọi $n \geq 2$ (khi $u_n \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$).

Ví dụ 1 Chứng minh mỗi dãy số (u_n) với số hạng tổng quát như sau là cấp số nhân. Chỉ ra số hạng đầu u_1 và công bội q:

a) $u_n = \frac{-3}{4} \cdot 2^n$;

b) $u_n = (-0{,}75)^n$.

Giải

a) Ta có: $u_1 = \frac{-3}{4} \cdot 2^1 = \frac{-3}{2}$; $u_n = \frac{-3}{4} \cdot 2^n = \frac{-3}{4} \cdot 2^{n-1} \cdot 2 = u_{n-1} \cdot 2$ với mọi $n \geq 2$. Vậy dãy số (u_n) đã cho là một cấp số nhân có $u_1 = \frac{-3}{2}$ và công bội $q = 2$.

b) Nhận thấy $u_n \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $u_1 = (-0{,}75)^1 = -0{,}75$; $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(-0{,}75)^n}{(-0{,}75)^{n-1}} = -0{,}75$ với mọi $n \geq 2$.

Vậy dãy số (u_n) đã cho là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = -0{,}75$ và công bội $q = -0{,}75$.

Vấn đề 2. Xác định số hạng và công bội của cấp số nhân

Ví dụ 2 Cho cấp số nhân (u_n) với số hạng đầu $u_1 = -5$, công bội $q = 2$.

a) Tìm u_9.

b) Số -320 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân trên?

c) Số 160 có phải là một số hạng của cấp số nhân trên không?

Giải

a) Ta có: $u_n = u_1 . q^{n-1} = (-5) . 2^{n-1}$. Do đó, $u_9 = -5 . 2^8 = -1\,280$.

b) Ta có: $(-5) . 2^{n-1} = -320 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 64 = 2^6 \Leftrightarrow n = 7$. Vậy số -320 là số hạng thứ 7 của (u_n).

c) Do $u_n = u_1 . q^{n-1} = (-5) . 2^{n-1} < 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên số 160 không là số hạng nào của (u_n).

Ví dụ 3 Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$, $u_3 = \dfrac{27}{4}$. Tìm công bội q của (u_n), biết $q > 0$.

Giải

Do $u_3 = u_1 . q^2$ nên ta có: $\dfrac{27}{4} = 3 . q^2$ hay $q^2 = \dfrac{9}{4}$. Mà $q > 0$. Suy ra $q = \dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 4 Cho cấp số nhân (u_n) với $u_3 = 16$ và $u_2 + u_4 = 40$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đó, biết $q > 1$.

Giải

Từ giả thiết, ta có: $\begin{cases} u_1 . q^2 = 16 \\ u_1(q+q^3) = 40. \end{cases}$ Vì $u_1 . q^2 \neq 0$ nên u_1 và q khác 0.

Suy ra: $\dfrac{q^2}{q+q^3} = \dfrac{16}{40} \Leftrightarrow \dfrac{q^2}{q+q^3} = \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow 2q^3 - 5q^2 + 2q = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 0 \\ q = 2 \\ q = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Mà $q > 1$ nên $q = 2$. Thay $q = 2$ vào phương trình $u_1 . q^2 = 16$, ta được $u_1 = 4$.

Vậy (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 4$ và công bội $q = 2$.

Vấn đề 3. Tính tổng *n* số hạng đầu của cấp số nhân

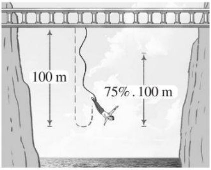
Ví dụ 5 Tính tổng: $S = 10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^{20}$.

Giải

Nhận thấy S là tổng 20 số hạng đầu của một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 10$ và công bội $q = 10$. Vậy $S = \dfrac{10 . (1-10^{20})}{1-10} = \dfrac{10^{21}-10}{9}$.

Vấn đề 4. Ứng dụng

Ví dụ 6 Một người nhảy bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài 100 m. Giả sử sau mỗi lần rơi xuống, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ cao bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên (*Hình 3*). Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần rơi xuống và lại được kéo lên, tính từ lúc bắt đầu nhảy (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Hình 3

Giải

Gọi u_1 (m) là quãng đường người chơi rơi xuống ở lần thứ nhất, ta có: $u_1 = 100$;

v_1 (m) là quãng đường người chơi được kéo lên ở lần thứ nhất, ta có:

$$v_1 = 100 \,.\, 0,75 = 75;$$

u_2 (m) là quãng đường người chơi rơi xuống ở lần thứ hai, ta có: $u_2 = v_1 = 0,75u_1$;

v_2 (m) là quãng đường người chơi được kéo lên ở lần thứ hai, ta có:

$$v_2 = 0,75u_2 = 0,75v_1.$$

Như vậy, ta có hai cấp số nhân đều có công bội 0,75 là: $u_1, u_2, \ldots, u_{10}$ và $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ với $u_1 = 100$ và $v_1 = 75$.

Ta có:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{10} = 100 \,.\left(\frac{1-0,75^{10}}{1-0,75}\right);\; v_1 + v_2 + \ldots + v_{10} = 75 \,.\left(\frac{1-0,75^{10}}{1-0,75}\right).$$

Vậy quãng đường người đó đi được sau 10 lần rơi xuống và lại được kéo lên (tính từ lúc bắt đầu nhảy) là:

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_{10}) + (v_1 + v_2 + \ldots + v_{10}) = 175 \,.\left(\frac{1-0,75^{10}}{1-0,75}\right) \approx 661 \text{ (m)}.$$

C. BÀI TẬP

30. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân?

A. 128; – 64; 32; – 16; 8.

B. $\sqrt{2}$; 2; $2\sqrt{2}$; 4; 8.

C. 5; 6; 7; 8; 9.

D. 15; 5; 1; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{25}$.

31. Trong các dãy số (u_n) với số hạng tổng quát sau, dãy số nào là cấp số nhân?

A. $u_n = 5^n$. **B.** $u_n = 1 + 5n$. **C.** $u_n = 5^n + 1$. **D.** $u_n = 5 + n^2$.

32. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = -2$. Giá trị u_5 là:

A. -32. **B.** -16. **C.** -6. **D.** 32.

33. Viết bốn số hạng xen giữa các số 1 và – 243 để được một cấp số nhân có 6 số hạng. Bốn số hạng đó lần lượt là:

A. $-3; -9; -27; -81$. **B.** $3; -9; 27; -81$.

C. $3; 9; 27; 81$. **D.** $-3; 9; -27; 81$.

34. Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_2 . u_6 = 64$. Giá trị của $u_3 . u_5$ là

A. -8. **B.** -64. **C.** 64. **D.** 8.

35. Cho (u_n) là cấp số nhân có $u_1 = \dfrac{1}{3}$; $u_8 = 729$. Tổng 8 số hạng đầu của cấp số nhân đó là:

A. $\dfrac{1-3^8}{2}$. **B.** $\dfrac{3^8-1}{6}$. **C.** $\dfrac{3^8-1}{2}$. **D.** $\dfrac{1-3^8}{6}$.

36. Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 1. Gọi C_2 là hình vuông có các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình vuông C_1; C_3 là hình vuông có các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình vuông C_2; … Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta được dãy các hình vuông $C_1; C_2; C_3; \ldots; C_n; \ldots$ Diện tích của hình vuông C_{2023} là:

A. $\dfrac{1}{2^{2\,022}}$. **B.** $\dfrac{1}{2^{2\,023}}$. **C.** $\dfrac{1}{2^{1\,011}}$. **D.** $\dfrac{1}{2^{1\,012}}$.

37. Cho ba số $\dfrac{2}{b-a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{2}{b-c}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

38. Tìm x để ba số $2x - 3; x; 2x + 3$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

39. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n), biết:

a) $\begin{cases} u_3 = 16 \\ u_2 + u_4 = 40; \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 + u_6 = 244 \\ u_2 . u_5 = 243; \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351. \end{cases}$

40. Cho (u_n) là cấp số nhân có $u_1 + u_5 = 51$ và $u_2 + u_6 = 102$.

a) Tính u_{10}.

b) Số 192 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân trên?

c) Số 9 216 có là số hạng nào của cấp số nhân trên không?

41. Một cấp số nhân có 7 số hạng, số hạng thứ tư bằng 2, số hạng thứ bảy gấp 32 lần số hạng thứ hai. Tìm các số hạng của cấp số nhân đó.

42. Ba số phân biệt tạo thành một cấp số nhân có tổng bằng 78; đồng thời chúng là số hạng thứ nhất, thứ ba và thứ chín của một cấp số cộng. Tìm ba số đó.

43. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 = -1$, $q = 3$.

a) Tính tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân đó.

b) Giả sử tổng m số hạng đầu của (u_n) bằng -364. Tìm m.

c) Tính tổng $S = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \frac{1}{u_5}$.

44*. Cho dãy số (u_n) biết $u_1 = 1$, $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + 1$ với $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Đặt $v_n = u_n - \frac{3}{2}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Chứng minh rằng dãy số (v_n) là cấp số nhân. Tìm số hạng đầu, công bội của cấp số nhân đó.

b) Tìm công thức số hạng tổng quát của (v_n), (u_n).

c) Tính tổng $S = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{10}$.

45. Anh Dũng kí hợp đồng lao động trong 10 năm với phương án trả lương như sau: Năm thứ nhất, tiền lương của anh Dũng là 120 triệu đồng. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương của anh Dũng được tăng lên 10%. Tính tổng số tiền lương anh Dũng lĩnh được trong 10 năm đầu đi làm (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị triệu đồng).

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

47. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = 5^n - n$. Số hạng u_{n+1} là:

A. $5^{n+1} - n - 1$. B. $5^{n+1} - n + 1$. C. $5^n - n + 1$. D. $5^n - n - 1$.

48. Cho dãy số (u_n) biết $u_1 = 2$, $u_n = \frac{1}{3}(u_{n-1} + 1)$ với $n \geq 2$. Số hạng u_4 bằng:

A. $u_4 = 1$. B. $u_4 = \frac{2}{3}$. C. $u_4 = \frac{14}{27}$. D. $u_4 = \frac{5}{9}$.

49. Trong các dãy số (u_n) với số hạng tổng quát sau, dãy số tăng là:

A. $u_n = \frac{2}{3^n}$. B. $u_n = \frac{3}{n}$. C. $u_n = 2^n$. D. $u_n = (-2)^n$.

50. Tổng 20 số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 3 tính từ số 3 là:

A. 1 320. **B.** 660. **C.** 630. **D.** 1 260.

51. Trong các dãy số (u_n) với số hạng tổng quát sau, dãy số nào là cấp số nhân?

A. $u_n = \dfrac{1}{5^n}$. **B.** $u_n = 1 + \dfrac{1}{5n}$. **C.** $u_n = \dfrac{1}{5^n} + 1$. **D.** $u_n = \dfrac{1}{n^2}$.

52. Cho cấp số nhân (u_n) có tất cả các số hạng đều không âm và $u_2 = 6$, $u_4 = 24$. Tổng 10 số hạng đầu của (u_n) là:

A. $3(1 - 2^{10})$. **B.** $3(2^9 - 1)$. **C.** $3(2^{10} - 1)$. **D.** $3(1 - 2^9)$.

53. Tổng 1 + 11 + 101 + 1001 + ... + 100...01 (12 số hạng) bằng:

A. $\dfrac{10^{11} + 107}{9}$. **B.** $\dfrac{10^{12} + 98}{9}$. **C.** $\dfrac{10^{12} + 107}{9}$. **D.** $\dfrac{10^{11} + 98}{9}$.

54. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \cos\left[(2n+1)\dfrac{\pi}{6}\right]$.

a) Viết sáu số hạng đầu của dãy số.

b) Chứng minh rằng $u_{n+6} = u_n$ với mọi $n \geq 1$.

c) Tính tổng 27 số hạng đầu của dãy số.

55. Cho dãy số (u_n) có tổng n số hạng đầu là $S_n = \dfrac{n(-1-5n)}{2}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Tính u_1, u_2 và u_3.

b) Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n.

c) Chứng minh rằng dãy số (u_n) là một cấp số cộng.

56*. Cho dãy số (u_n) biết $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 2$ với $n \geq 2$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số.

b) Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) là cấp số cộng.

c) Tìm công thức của v_n, u_n tính theo n.

57*. Cho dãy số (u_n), biết $u_1 = -2$, $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n}u_n$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Đặt $v_n = \dfrac{u_n}{n}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Chứng minh rằng dãy số (v_n) là cấp số nhân. Tìm số hạng đầu, công bội của cấp số nhân đó.

b) Tìm công thức của u_n tính theo n.

58. Một công ty mua một chiếc máy với giá 1 tỉ 200 triệu đồng. Công ty nhận thấy, trong vòng 5 năm đầu, tốc độ khấu hao là 25%/năm (tức là sau mỗi một năm, giá trị còn lại của chiếc máy bằng 75% giá trị của năm trước đó).

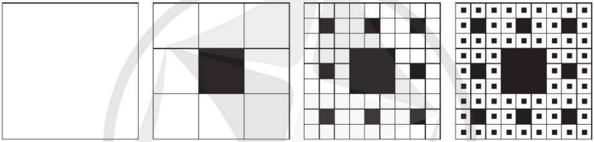
a) Viết công thức tính giá trị của chiếc máy đó sau 1 năm, 2 năm.

b) Sau 5 năm, giá trị của chiếc máy đó còn khoảng bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

59. Một hình vuông có diện tích bằng 1 đơn vị diện tích. Chia hình vuông đó thành 9 hình vuông bằng nhau và tô màu hình vuông ở chính giữa. Với mỗi hình vuông nhỏ chưa được tô màu, lại chia thành 9 hình vuông bằng nhau và tô màu hình vuông ở chính giữa. Cứ như thế, quá trình trên được lặp lại.

a) Tính tổng diện tích phần đã được tô màu ở hình thứ nhất, thứ hai, thứ ba.

b) Dự đoán công thức tính tổng diện tích phần đã được tô màu ở hình thứ n.



Hình thứ nhất *Hình thứ hai* *Hình thứ ba*

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

§1 DÃY SỐ

1. C. **2. C.** **3. B.** **4. A.** **5. C.** **6. C.**

7. Tổng 6 số hạng đầu của dãy số (u_n) là 57.

8. Năm số hạng đầu của dãy số (u_n) là $2; \sqrt{6}; 2\sqrt{2}; \sqrt{10}; 2\sqrt{3}$.

Dự đoán công thức số hạng tổng quát $u_n = \sqrt{2(n+1)}$.

9. $u_n = \dfrac{2n-1}{2n^2+1}$.

10. a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $u_{n+4} = \sin\left[(2n+7)\dfrac{\pi}{4}\right] = \sin\left[(2n-1)\dfrac{\pi}{4} + 2\pi\right] = \sin\left[(2n-1)\dfrac{\pi}{4}\right] = u_n, \forall n \geq 1.$

c) Tổng 12 số hạng của dãy số là: $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_{12}$

$$= 3(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) = 3 \,.\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$$

11. a) Dãy số tăng. b) Dãy số tăng. c) Dãy số giảm.

d) Không là dãy số tăng, không là dãy số giảm.

12. Ta có: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{a(n+1)+2}{n+2} - \dfrac{an+2}{n+1} = \dfrac{a-2}{(n+2)(n+1)} > 0 \Leftrightarrow a > 2.$

Vậy (u_n) là dãy số tăng khi $a > 2$.

13. a) Ta có: $\sqrt{n^2+1} \geq \sqrt{2}\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy số (u_n) bị chặn dưới.

b) Ta có: $-n^2 - n \leq -2\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy số (u_n) bị chặn trên.

c) Ta có: $0 < \dfrac{2n+1}{n+2} < 2\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy số (u_n) bị chặn.

14*. Ta thấy đường tròn được chia thành $n + 6$ cung bằng nhau và mỗi cung có số đo bằng $\left(\dfrac{360}{n+6}\right)^\circ$. Do mỗi điểm được nối với điểm cách nó hai điểm trên đường tròn nên góc ở đỉnh của mỗi ngôi sao là góc nội tiếp chắn $n + 6 - 2 \,.\, 3 = n$ cung bằng nhau đó. Suy ra số đo góc ở đỉnh tính theo đơn vị độ của mỗi ngôi sao là $u_n = \dfrac{1}{2} \,.\, \dfrac{360}{n+6} \,.\, n = \dfrac{180n}{n+6}$.

§2 CẤP SỐ CỘNG

15. B. **16. A**. **17. A**. **18. D**. **19. B**. **20. B**.

21. Do ba số $\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{c+a}, \dfrac{1}{a+b}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên

$$\frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a} \Leftrightarrow \frac{2}{c+a} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c}.$$

$\Rightarrow 2b^2 = a^2 + c^2 \Leftrightarrow b^2 - a^2 = c^2 - b^2$. Suy ra ba số a^2, b^2, c^2 theo thứ tự cũng lập thành một cấp số cộng.

22. Ba số $10 - 3x$, $2x^2 + 3$, $7 - 4x$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng khi

$$(2x^2 + 3) - (10 - 3x) = (7 - 4x) - (2x^2 + 3) \Leftrightarrow 4x^2 + 7x - 11 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{-11}{4}. \end{array}\right.$$

23. a) $u_1 = 1, d = 3$. b) $u_1 = 16, d = -3$. c) $u_1 = 3, d = 3$.

24. a) Ta có: $u_1 = 1$, $d = 5$. Suy ra $u_{100} = 496$, $S_{100} = 24\,850$.

b) Các số $u_1, u_5, u_9, \ldots, u_{101}$ lập thành cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$, công sai $d' = 4d = 20$. Tổng $u_1 + u_5 + u_9 + \ldots + u_{101}$ gồm 26 số hạng và bằng 6 526.

25. Năm số hạng liên tiếp của cấp số cộng cần tìm là: 0; 4; 8; 12; 16.

26. a) 156. b) $u_1 = 19, d = 2$.

27*. a) Ta có: $v_n = 1 + \dfrac{1}{u_n}$, $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_{n+1}} = 1 + \dfrac{1 - u_n}{u_n} = \dfrac{1}{u_n}$.

Khi đó, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_n} - \left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right) = -1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Vậy dãy số (v_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu $v_1 = \dfrac{1}{2}$, công sai $d = -1$.

b) $v_n = \dfrac{3}{2} - n$, $u_n = \dfrac{2}{1 - 2n}$.

c) $S = \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3} + \ldots + \dfrac{1}{u_{20}} = (v_1 - 1) + (v_2 - 1) + (v_3 - 1) + \ldots + (v_{20} - 1)$

$= v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_{20} - 20 = -200$.

28. Lúc 1 giờ đêm, toà tháp đánh 1 tiếng chuông; lúc 2 giờ đêm, toà tháp đánh 2 tiếng chuông; …; lúc 12 h trưa, toà tháp đánh 12 tiếng chuông. Ngoài ra, mỗi 30 phút không phải là giờ đúng thì đánh 1 tiếng chuông (có 11 lần như thế từ 1 giờ đến 12 giờ).

Vậy tổng số tiếng chuông là: $S = (1 + 2 + 3 + \ldots + 12) + 1\,.\,11 = 89$.

29. Tổng số khúc gỗ được xếp là: $15 + 16 + \ldots + 21 = \dfrac{(21 + 15)\,.\,7}{2} = 126$.

§3 CẤP SỐ NHÂN

30. A. 31. A. 32. D. 33. D. 34. C. 35. B. 36. A.

37. Do ba số $\frac{2}{b-a}, \frac{1}{b}, \frac{2}{b-c}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên

$$\frac{1}{b}-\frac{2}{b-a}=\frac{2}{b-c}-\frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{-b-a}{b-a}=\frac{b+c}{b-c} \Rightarrow b^2=ac \Leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{c}{b}.$$

Suy ra ba số *a*, *b*, *c* theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

38. Ba số $2x-3$, x, $2x+3$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân khi

$$\frac{x}{2x-3}=\frac{2x+3}{x} \Rightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}.$$

39. a) Ta có: $u_2+u_4=\frac{u_3}{q}+u_3q=\frac{16}{q}+16q.$

Suy ra $\frac{16}{q}+16q=40 \Rightarrow 16q^2-40q+16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q=\frac{1}{2} \\ q=2. \end{array}\right.$

Lại có $u_3=u_1q^2=16 \Rightarrow u_1=\frac{16}{q^2}.$

Với $q=\frac{1}{2}$ thì $u_1=64$; Với $q=2$ thì $u_1=4$.

b) $u_1=1$, $q=3$ hoặc $u_1=243$, $q=1$.

c) $u_1=1$, $q=3$.

40. a) Xét số hạng đầu u_1 và công bội q. Từ giả thiết ta có:

$$\begin{cases} u_1+u_1q^4=51 \\ u_1q+u_1q^5=102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q^4)=51 \\ u_1q(1+q^4)=102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=2 \\ u_1=3. \end{cases}$$

Suy ra $u_{10}=u_1 \,.\, q^9=3 \,.\, 2^9=1\,536$.

b) Số 192 là số hạng thứ 7.

c) Giả sử 9 216 là số hạng thứ *n* của cấp số nhân (u_n).

Ta có $3 \,.\, 2^{n-1}=9\,216 \Leftrightarrow 2^{n-1}=3\,072$. Do 3 072 chia hết cho 3 mà với *n* là số nguyên dương thì 2^{n-1} không chia hết cho 3 nên không tồn tại *n* thoả mãn. Vậy số 9 216 không là số hạng nào của (u_n).

41. Cấp số nhân đó là: $\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; 2; 4; 8; 16$.

42. Ba số cần tìm là: 6; 18; 54.

43. a) $S_{10} = -29\,524$. b) $m = 6$.

c) Dãy $\frac{1}{u_1}; \frac{1}{u_2}; ...; \frac{1}{u_5}$ là cấp số nhân với số hạng đầu là $u_1' = \frac{1}{u_1} = -1$, công bội là $q' = \frac{1}{q} = \frac{1}{3}$.

Suy ra $S = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \frac{1}{u_5} = \frac{(-1)\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5\right]}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{-121}{81}$.

44*. a) Ta có: $v_n = u_n - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}u_{n-1} + 1 - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}u_{n-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(u_{n-1} - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3}v_{n-1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

Vậy (v_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $v_1 = -\frac{1}{2}$, công bội $q = \frac{1}{3}$.

b) $v_n = \frac{-1}{2 \cdot 3^{n-1}}$, $u_n = v_n + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} = \frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^{n-1}}$.

c) $S = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{10} = \left(v_1 + \frac{3}{2}\right) + \left(v_2 + \frac{3}{2}\right) + \left(v_3 + \frac{3}{2}\right) + ... + \left(v_{10} + \frac{3}{2}\right)$

$= v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_{10} + 10 \cdot \frac{3}{2} = \frac{280\,483}{19\,683}$.

45. 1 912 triệu đồng.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

47. A. 48. D. 49. C. 50. C. 51. A. 52. C. 53. B.

54. a) Sáu số hạng đầu của dãy số là: $0; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Ta có:

$u_{n+6} = \cos\left[(2n+13)\frac{\pi}{6}\right] = \cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{6} + 2\pi\right] = \cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{6}\right] = u_n$ với $n \geq 1$.

c) Vì $u_n = u_{n+6}$ với $n \geq 1$ nên

$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{27} = 4 \cdot (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6) + u_1 + u_2 + u_3$

$= 4 \cdot \left[0 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] + 0 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$.

55. a) Ta có: $u_1 = S_1 = -3$.

Vì $S_2 = u_1 + u_2 = -11$ nên $u_2 = S_2 - S_1 = -8$.

Vì $S_3 = S_2 + u_3 = -24$ nên $u_3 = S_3 - S_2 = -13$.

b) Ta có: $u_n = S_n - S_{n-1} = 2 - 5n$.

c) Ta có: $u_n - u_{n-1} = -5$ với mọi $n \geq 2$. Vậy dãy số (u_n) là một cấp số cộng.

56*. a) Năm số hạng đầu của dãy số là: 1; 2; 5; 10; 17.

b) Từ công thức $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 2$ suy ra $u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1} + 2$ hay $v_n = v_{n-1} + 2$ với $n \geq 2$. Vậy dãy số (v_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu $v_1 = 1$ và công sai $d = 2$.

c) Từ kết quả câu b, ta có: $v_n = -1 + 2n$.

Ta có: $v_1 = u_2 - u_1$

$v_2 = u_3 - u_2$

...

$v_{n-2} = u_{n-1} - u_{n-2}$

$v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$

Cộng theo từng vế của $n - 1$ đẳng thức trên, ta có:

$$v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_{n-1} = -u_1 + u_n \Leftrightarrow u_n = 1 + (n-1)^2.$$

57*. a) Ta có: $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{n+1} = \left(\dfrac{n+1}{2n}u_n\right) : (n+1) = \dfrac{u_n}{2n} = \dfrac{1}{2}v_n$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy (v_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $v_1 = -2$, công bội $q = \dfrac{1}{2}$.

b) Từ kết quả câu a, ta có: $v_n = (-2) . \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$, suy ra $u_n = -n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$.

58. a) Giá trị của máy sau 1 năm, 2 năm lần lượt là:

1 200 . 0,75 = 900 (triệu đồng); 1 200 . $0{,}75^2$ = 675 (triệu đồng).

b) Sau 5 năm, giá trị chiếc máy đó còn là: 1 200 . $0{,}75^5 \approx 285$ (triệu đồng).

59. a) Diện tích phần đã được tô màu ở hình thứ nhất, hình thứ hai, hình thứ ba lần lượt là: $1 - \left(\dfrac{8}{9}\right) = \dfrac{1}{9}$; $1 - \left(\dfrac{8}{9}\right)^2 = \dfrac{17}{81}$; $1 - \left(\dfrac{8}{9}\right)^3 = \dfrac{217}{729}$.

b) Gọi S_n là diện tích phần đã được tô màu ở hình thứ n. Ta có: $S_n = 1 - \left(\dfrac{8}{9}\right)^n$.

Chương III GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

§1 GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Các định nghĩa

a) Giới hạn hữu hạn của dãy số

- Dãy số (u_n) có giới hạn 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ nếu $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - a) = 0$.

Chú ý

– Một dãy số có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.

– Không phải dãy số nào cũng có giới hạn, chẳng hạn như dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n$.

– Ta có thể viết tắt $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ là $\lim u_n$.

b) Giới hạn vô cực

- Dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi n dần tới dương vô cực nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ nếu $\lim\limits_{n \to +\infty} (-u_n) = +\infty$.

c) Tổng cấp số nhân lùi vô hạn

Cấp số nhân vô hạn $u_1, u_1q, ..., u_1q^{n-1}, ...$ có công bội q thoả mãn $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn. Tổng của cấp số nhân đó là:

$$S = u_1 + u_1q + ... + u_1q^{n-1} + ... = \frac{u_1}{1-q}.$$

2. Định lí về giới hạn hữu hạn

• Nếu $\lim u_n = a$, $\lim v_n = b$ thì:

$\lim(u_n + v_n) = a + b$; $\lim(u_n - v_n) = a - b$;

$\lim(u_n \,.\, v_n) = a \,.\, b$; $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$ $(v_n \neq 0,\ b \neq 0)$.

• Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

3. Một số giới hạn cơ bản

• $\lim \dfrac{1}{n} = 0$; $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$ với k là số nguyên dương cho trước;

• $\lim \dfrac{c}{n} = 0$; $\lim \dfrac{c}{n^k} = 0$ với c là hằng số, k là số nguyên dương cho trước;

• Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$;

• $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,718281828459045$;

• $\lim n^k = +\infty$ với k là số nguyên dương cho trước;

• $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$ là số thực cho trước;

• Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = +\infty$ (hoặc $\lim v_n = -\infty$) thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$;

• Nếu $\lim u_n = a$, $a > 0$ và $\lim v_n = 0$, $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$;

• Nếu $\lim u_n = a$, $a > 0$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim(u_n v_n) = \pm\infty$.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Xác định giới hạn của dãy số bằng định nghĩa

Ví dụ 1 Chứng minh rằng $\lim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$.

Giải

Xét dãy số (u_n) có $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Giả sử h là số dương bé tuỳ ý cho trước. Ta có:

$|u_n| = \left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Do đó: $|u_n| < h \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n}} < h \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} < h^2 \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{h^2}$.

Vậy với các số tự nhiên n lớn hơn $\frac{1}{h^2}$ thì $|u_n| < h$.

Theo định nghĩa về dãy số có giới hạn 0, ta có: $\lim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$.

Vấn đề 2. Tính giới hạn hữu hạn của dãy số bằng định lí

Ví dụ 2 Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\left(5-\frac{2}{n^3}\right)$; b) $\lim\left(4-\frac{2}{n}\right)\left(5+\frac{1}{3^n}\right)$.

Giải

a) $\lim\left(5-\frac{2}{n^3}\right) = \lim 5 - \lim\frac{2}{n^3} = 5 - 0 = 5$.

b) $\lim\left(4-\frac{2}{n}\right)\left(5+\frac{1}{3^n}\right) = \left(\lim 4 - \lim\frac{2}{n}\right) . \left(\lim 5 + \lim\frac{1}{3^n}\right) = 4 . 5 = 20$.

Vấn đề 3. Tính giới hạn của dãy số có dạng $\frac{C}{\infty}$, $\frac{\infty}{C}$, $\frac{C}{0}$ $(C \neq 0)$, $\frac{\infty}{\infty}$

Phương pháp: Sử dụng định lí giới hạn hữu hạn và một số giới hạn cơ bản

Ví dụ 3 Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\frac{2+\frac{1}{n}}{2^n}$; b) $\lim\frac{-3n+2}{4}$; c) $\lim\frac{-3+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}$; d) $\lim\frac{2n+1}{-3n+4}$.

Giải

a) Vì $\lim\left(2+\frac{1}{n}\right) = \lim 2 + \lim\frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$ và $\lim 2^n = +\infty$ nên $\lim\frac{2+\frac{1}{n}}{2^n} = 0$.

b) Vì $\lim(-3n+2) = \lim\left[n\left(-3+\frac{2}{n}\right)\right] = \lim[(-3) . n] = -\infty$ và $4 > 0$ nên

$$\lim\frac{-3n+2}{4} = -\infty.$$

c) Vì $\lim\left(-3+\frac{1}{n}\right) = -3 < 0$; $\lim\frac{1}{n^2} = 0$ và $\frac{1}{n^2} > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $\lim\frac{-3+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = -\infty$.

d) $\lim\frac{2n+1}{-3n+4} = \lim\frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(-3+\frac{4}{n}\right)} = \frac{\lim\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\lim\left(-3+\frac{4}{n}\right)} = -\frac{2}{3}$.

Vấn đề 4. Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Ví dụ 4 Tính các tổng sau:

a) $M = 2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{5^2} + ... + \frac{2}{5^n} + ...$;

b) $N = 3 - \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} - ... + 3\left(-\frac{1}{4}\right)^n + ...$

Giải

a) Các số hạng của tổng lập thành cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$, $q = \frac{1}{5} < 1$ nên

$$M = 2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{5^2} + ... + \frac{2}{5^n} + ... = \frac{2}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{2}.$$

b) Các số hạng của tổng lập thành cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$, $q = -\frac{1}{4}$, $|q| < 1$ nên

$$N = 3 - \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} - ... + 3\left(-\frac{1}{4}\right)^n + ... = \frac{3}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{12}{5}.$$

Vấn đề 5. **Ứng dụng**

Ví dụ 5 Một mẫu chất phóng xạ $^{210}_{84}Po$ có khối lượng ban đầu $m_0 = 42$ (mg), nhưng cứ sau một khoảng thời gian T = 138 ngày thì khối lượng chất đó giảm đi một nửa (T được gọi là *chu kì bán rã*). Gọi u_n là khối lượng còn lại của mẫu chất phóng xạ sau n chu kì bán rã.

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

b) Tính giới hạn của dãy số (u_n) và cho biết ý nghĩa của giới hạn đó.

Giải

a) Vì cứ sau 1 chu kì bán rã thì khối lượng mẫu chất phóng xạ giảm một nửa nên (u_n) là cấp số nhân với $u_1 = 21$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Khi đó, số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là: $u_n = \frac{42}{2^n}$.

b) Ta có: $\lim u_n = \lim \frac{42}{2^n} = \lim 42 \,.\, \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 42 \,.\, 0 = 0$. Từ giới hạn đó, ta rút ra được ý nghĩa: Khi n càng dần tới vô cực thì khối lượng còn lại của mẫu chất phóng xạ càng dần về 0, nghĩa là sau một khoảng thời gian đủ dài thì khối lượng còn lại của mẫu chất phóng xạ là rất nhỏ (đến mức không đáng kể).

C. BÀI TẬP

1. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. $\lim \dfrac{1}{2^n} = 0$. **B.** $\lim \left(\dfrac{3}{2}\right)^n = 0$. **C.** $\lim \dfrac{1}{(\sqrt{2})^n} = 0$. **D.** $\lim \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$.

2. Cho $\lim u_n = a$, $\lim v_n = b$. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. $\lim(u_n + v_n) = a + b$. **B.** $\lim(u_n - v_n) = a - b$.

C. $\lim(u_n \,.\, v_n) = a \,.\, b$. **D.** $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a-b}{b}$.

3. Nếu $\lim u_n = C$ và $\lim v_n = +\infty$ (hoặc $\lim v_n = -\infty$) thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$ bằng:

A. 0. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$ hoặc $+\infty$.

4. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = C$, $C > 0$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$.

B. Nếu $\lim u_n = -\infty$ và $\lim v_n = C$, $C < 0$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$.

C. Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = C$, $C < 0$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

D. Nếu $\lim u_n = -\infty$ và $\lim v_n = C$, $C > 0$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = -\infty$.

5. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Nếu $\lim u_n = a$ thì $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

B. Nếu $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ *và* $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

C. Nếu $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$.

D. Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

6. Chứng minh rằng $\lim \dfrac{(-1)^n}{n^2} = 0$.

7. Cho hai dãy số (u_n), (v_n) với $u_n = 3 - \dfrac{4}{n+1}$, $v_n = 8 - \dfrac{5}{3n^2+2}$. Tính:

a) $\lim u_n$, $\lim v_n$;

b) $\lim(u_n + v_n)$, $\lim(u_n - v_n)$, $\lim(u_n \,.\, v_n)$, $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$.

8. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{4n+2}{3}$; b) $\lim \dfrac{3n+4}{-5+\dfrac{2}{n}}$; c) $\lim \dfrac{-3+\dfrac{1}{n+1}}{5^n}$; d) $\lim\left(6 - \dfrac{5}{4^n}\right)$.

9. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{6n-5}{3n}$; b) $\lim \dfrac{-2n^2-6n+2}{8n^2-5n+4}$; c) $\lim \dfrac{n^3-5n+1}{3n^2-4n+2}$;

d) $\lim \dfrac{-4n+1}{9n^2-n+2}$; e) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+n+1}}{8n+3}$; g) $\lim \dfrac{4^n+5^n}{3 \,.\, 4^n-4 \,.\, 5^n}$.

10. a) Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với $u_1 = \dfrac{5}{4}$, $q = -\dfrac{1}{3}$.

b) Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn 2,(3) dưới dạng phân số.

11. Từ độ cao 100 m, người ta thả một quả bóng cao su xuống đất. Giả sử cứ sau mỗi lần chạm đất, quả bóng nảy lên một độ cao bằng $\dfrac{1}{4}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi h_n là độ cao quả bóng đạt được ở lần nảy thứ n.

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (h_n).

b) Tính giới hạn của dãy số (h_n) và nêu ý nghĩa giới hạn của dãy số (h_n).

c) Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường đi được của quả bóng từ lúc bắt đầu thả quả bóng đến khi quả bóng chạm đất lần thứ n. Tính S_n, nếu quá trình này cứ tiếp tục diễn ra mãi thì tổng quãng đường quả bóng di chuyển được là bao nhiêu?

§2 GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Các định nghĩa

a) Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$.

Hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$ thì $f(x_n) \to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

b) Giới hạn một phía

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\,;\,x_0)$.

Hàm số $f(x)$ có giới hạn bên trái là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \to x_0$ thì $f(x_n) \to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0 ; b)$.

Hàm số $f(x)$ có giới hạn bên phải là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$ thì $f(x_n) \to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

Chú ý: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

c) Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a ; +\infty)$.

Hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới dương vô cực nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$ thì $f(x_n) \to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty ; a)$.

Hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới âm vô cực nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \to -\infty$ thì $f(x_n) \to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.

d) Giới hạn vô cực (một phía) của hàm số tại một điểm

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a ; +\infty)$.

Hàm số $f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x \to a^+$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to a$ thì $f(x_n) \to +\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$.

• Các trường hợp $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

e) Giới hạn vô cực của hàm số tại vô cực

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a ; +\infty)$.

Hàm số $f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi x dần tới dương vô cực nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$ thì $f(x_n) \to +\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

• Các trường hợp $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

2. Một số kết quả giới hạn cơ bản

• $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$;

• $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$, với c là hằng số;

• Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$ $(L, M \in \mathbb{R})$. Khi đó:

$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$; $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$;

$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \,.\, g(x)] = L \,.\, M$; $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$);

• Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$;

• Với c, k là các hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:

$\lim\limits_{x \to +\infty} c = c$; $\lim\limits_{x \to -\infty} c = c$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$;

• Các phép toán trên giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \to x_0$ vẫn còn đúng khi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$;

• $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{1}{x-a} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{1}{x-a} = -\infty$;

• Với k là số nguyên dương, ta có:

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = +\infty$ (k chẵn); $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = -\infty$ (k lẻ).

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Xác định giới hạn của hàm số bằng định nghĩa

Ví dụ 1 Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ với $x \neq 3$.

Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 6$.

Giải

Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, thoả mãn $x_n \neq 3$ và $\lim x_n = 3$.

Ta có: $\lim f(x_n) = \lim \dfrac{x_n^2 - 9}{x_n - 3} = \lim \dfrac{(x_n - 3)(x_n + 3)}{x_n - 3}$

$= \lim(x_n + 3) = \lim x_n + \lim 3 = 3 + 3 = 6$. Vậy $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 6$.

Vấn đề 2. Tính giới hạn của hàm số bằng một số kết quả giới hạn cơ bản

Ví dụ 2 Cho $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$. Chứng minh rằng: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{2} = 1$.

Giải

Ta có: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{2} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 1} f(x)}{\lim\limits_{x \to 1} 2} = \dfrac{2}{2} = 1$.

Ví dụ 3 Khi thực hiện tính $\lim\limits_{x \to 1} [3f(x)]$ biết $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$, một bạn làm như sau:

$$\lim_{x \to 1} [3f(x)] = \lim_{x \to 1} f(3x) = \lim_{3x \to 3} f(3x) = 3.$$

a) Theo em, lời giải trên có đúng không? Giải thích.

b) Nếu lời giải trên là sai, em hãy trình bày lời giải đúng.

Giải

a) Vì không có giả thiết $3f(x) = f(3x)$ nên $\lim\limits_{x \to 1} [3f(x)] \neq \lim\limits_{x \to 1} f(3x)$. Hơn nữa, từ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$ không có cơ sở để kết luận được $\lim\limits_{3x \to 3} f(3x) = 3$.

b) Ta có: $\lim\limits_{x \to 1} [3f(x)] = \lim\limits_{x \to 1} 3 \,.\, \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3 \,.\, 1 = 3$.

Ví dụ 4 Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 3} (-x^2 + x + 2)$; b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{3x - 2}$; c) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{5x^2 + x + 4}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x \to 3} (-x^2 + x + 2) = \lim\limits_{x \to 3} (-x^2) + \lim\limits_{x \to 3} x + \lim\limits_{x \to 3} 2 = -9 + 3 + 2 = -4$.

b) $$\lim_{x \to -1} \frac{3x^2 - 2x + 1}{3x - 2} = \frac{\lim\limits_{x \to -1} (3x^2 - 2x + 1)}{\lim\limits_{x \to -1} (3x - 2)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -1} (3x^2) - \lim\limits_{x \to -1} (2x) + \lim\limits_{x \to -1} 1}{\lim\limits_{x \to -1} (3x) - \lim\limits_{x \to -1} 2} = \frac{3 - (-2) + 1}{(-3) - 2} = -\frac{6}{5}.$$

c) Ta có: $\lim\limits_{x \to 2}(5x^2 + x + 4) = 26$ nên $\lim\limits_{x \to 2}\sqrt{5x^2 + x + 4} = \sqrt{26}$.

Vấn đề 3. Tính giới hạn của hàm số có dạng $\frac{C}{\infty}$, $\frac{C}{0}$ $(C \neq 0)$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$

Ví dụ 5 Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{1}{x^2+2}$; b) $\lim\limits_{x \to 3^+}\dfrac{1}{x-3}$; c) $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{3x+2}{4x-5}$; d) $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x-1}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{1}{x^2+2} = \lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{x^2\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x^2}} = \dfrac{0}{1} = 0.$

b) $\lim\limits_{x \to 3^+}\dfrac{1}{x-3} = +\infty.$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{3x+2}{4x-5} = \lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{x\left(3+\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(4-\dfrac{5}{x}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{3+\dfrac{2}{x}}{4-\dfrac{5}{x}} = \dfrac{3}{4}.$

d) $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1}\dfrac{(x-1)(3x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1}(3x-1) = 3-1 = 2.$

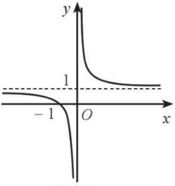
Ví dụ 6 Cho $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{f(x)-5}{x-2} = 3$. Tìm $\lim\limits_{x \to 2}f(x)$.

Giải

Nếu $\lim\limits_{x \to 2}[f(x)-5] \neq 0$ thì $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{f(x)-5}{x-2} = -\infty$ hoặc $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{f(x)-5}{x-2} = +\infty$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $\lim\limits_{x \to 2}[f(x)-5] = 0$. Suy ra $\lim\limits_{x \to 2}f(x) = 5$.

Vấn đề 4. Xác định giới hạn của hàm số dựa vào đồ thị

Ví dụ 7 Quan sát đồ thị hàm số ở *Hình 1* và cho biết các giới hạn sau: $\lim\limits_{x \to -\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0^-}f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0^+}f(x)$.



Hình 1

Giải

Từ đồ thị hàm số ta có:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Vấn đề 5. Ứng dụng

Ví dụ 8 Số lượng xe ô tô vào một đường hầm được cho bởi công thức $f(v) = \dfrac{290,4v}{0,36v^2 + 13,2v + 264}$, trong đó v (m/s) là vận tốc trung bình của các xe khi đi vào đường hầm. Tính $\lim\limits_{v \to 20} f(v)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Giải

Ta có: $\lim\limits_{v \to 20} \dfrac{290,4v}{0,36v^2 + 13,2v + 264} = \dfrac{\lim\limits_{v \to 20} 290,4v}{\lim\limits_{v \to 20} 0,36v^2 + \lim\limits_{v \to 20} 13,2v + \lim\limits_{v \to 20} 264}$

$= \dfrac{290,4 \,.\, 20}{0,36 \,.\, 20^2 + 13,2 \,.\, 20 + 264} \approx 9$. Từ kết quả đó, ta thấy lưu lượng xe vào hầm ở thời điểm vận tốc trung bình của các xe đạt 20 m/s là khoảng 9 xe ô tô trong 1 s.

C. BÀI TẬP

12. Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$ $(L, M \in \mathbb{R})$. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$.

B. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$.

C. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \,.\, g(x)] = L \,.\, M$.

D. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$.

13. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0\,; b)$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$ thì $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

B. Nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$ thì $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

C. Nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to L$, ta có $f(x_n) \to x_0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

D. Nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < x_0$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$ thì $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

14. Với c, k là các hằng số và k nguyên dương thì

A. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0.$ **B.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{c}{x^k} = +\infty.$

C. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{c}{x^k} = -\infty.$ **D.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{c}{x^k} = +\infty$ hoặc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{c}{x^k} = -\infty.$

15. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}.$

B. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0.$

C. Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}.$

D. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}.$

16. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\,;+\infty)$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to L$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L.$

B. Nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to L$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L.$

C. Nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$, ta có $f(x_n) \to L$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L.$

D. Nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to L$, ta có $f(x_n) \to +\infty$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L.$

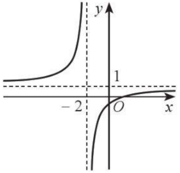
17. Sử dụng định nghĩa, chứng minh rằng:

a) $\lim\limits_{x \to -2} x^3 = -8.$ b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = -4.$

18. Cho $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$, chứng minh rằng:

a) $\lim\limits_{x \to 3} 3f(x) = 12$; b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)}{4} = 1$; c) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{f(x)} = 2$.

19. Quan sát đồ thị hàm số ở *Hình 2* và cho biết các giới hạn sau: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x)$.



Hình 2

20. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to -1} (-4x^2 + 3x + 1)$; b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{-4x+1}{x^2 - x + 3}$; c) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{3x^2 + 5x + 4}$;

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3 + \dfrac{4}{x}}{2x^2 + 3}$; e) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{-3}{x-2}$; g) $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{5}{x+2}$.

21. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-5x+2}{3x+1}$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x+3}{3x^2+2x+5}$; c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+3}}{x+1}$;

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+3}}{x+1}$; e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 - 1}$; g) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{-x^2 + 2x + 15}{x^2 + 4x + 3}$.

22. Cho $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 4}{x - 1} = 2$. Tính:

a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$; b) $\lim\limits_{x \to 1} 3f(x)$.

23*. Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2\,022$. Tính $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xf(x)}{x+1}$.

24*. Cho số thực a và hàm số $f(x)$ thoả mãn $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$. Chứng minh rằng:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - 3}{2f(x) + 1} = \frac{1}{2}.$$

25. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên biến đổi theo một hàm số thời gian (tính theo ngày) là $g(t) = 45t^2 - t^3$ (người). Tốc độ trung bình gia tăng người bệnh giữa hai thời điểm t_1, t_2 là $V_{tb} = \dfrac{g(t_2) - g(t_1)}{t_2 - t_1}$. Tính $\lim\limits_{t \to 10} \dfrac{g(t) - g(10)}{t - 10}$ và cho biết ý nghĩa của kết quả tìm được.

§3 HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Các định nghĩa

a) Hàm số liên tục tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a ; b)$ và $x_0 \in (a ; b)$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

b) Hàm số liên tục trên một khoảng hoặc một đoạn

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng $(a ; b)$ nếu hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a ; b]$ nếu hàm số đó liên tục trên khoảng $(a ; b)$ và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$; $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

2. Các định lí

a) Tính liên tục của một số hàm số sơ cấp cơ bản

- Các hàm đa thức và hai hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Các hàm phân thức hữu tỉ và hai hàm số lượng giác $y = \tan x$, $y = \cot x$ liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

b) Tính liên tục của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm liên tục

Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

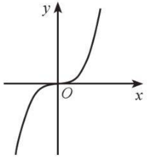
- Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x) \,.\, g(x)$ liên tục tại x_0;
- Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

B. VÍ DỤ

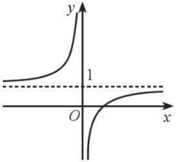
Vấn đề 1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Ví dụ 1 Quan sát đồ thị hàm số $y = f(x)$ và tìm $f(0)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Từ đó, cho biết tính liên tục của mỗi hàm số đó tại $x = 0$ trong mỗi trường hợp sau:

a) Đồ thị trong *Hình 3*; b) Đồ thị trong *Hình 4*.



Hình 3



Hình 4

Giải

a) Từ đồ thị trong *Hình 3*, ta thấy: $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$.

Như vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 0$

b) Từ đồ thị trong *Hình 4*, ta thấy: không tồn tại giá trị của $f(x)$ khi $x = 0$ nên hàm số $f(x)$ không liên tục tại $x = 0$.

Ví dụ 2 Xét tính liên tục tại $x = 2$ của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{nếu} \quad x \geq 2 \\ x - 1 & \text{nếu} \quad x < 2. \end{cases}$

Giải

Ta có: $f(2) = 1$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 3) = \lim\limits_{x \to 2^+} x^2 - \lim\limits_{x \to 2^+} 3 = 4 - 3 = 1$;

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x - 1) = \lim_{x \to 2^-} x - \lim_{x \to 2^-} 1 = 2 - 1 = 1.$$

Suy ra $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1 = f(2)$. Vậy hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$.

Vấn đề 2. Xét tính liên tục của hàm số trên một khoảng, đoạn

Ví dụ 3 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{nếu} \quad x < 2 \\ -x & \text{nếu} \quad x \geq 2. \end{cases}$

a) Hàm số trên có liên tục tại $x = 2$ hay không?

b) Hàm số trên có liên tục trên $\mathbb{R}$ hay không?

Giải

a) Ta có: $f(2) = -2$;

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x - 4) = -2; \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (-x) = -2.$$

Suy ra $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$. Vậy hàm số trên liên tục tại $x = 2$.

b) Với $x < 2$, $f(x) = x - 4$ là hàm đa thức nên $f(x)$ liên tục trên $(-\infty\ ;\ 2)$.

Với $x > 2$, $f(x) = -x$ là hàm đa thức nên $f(x)$ liên tục trên $(2\ ;\ +\infty)$.

Ngoài ra, theo câu a ta có hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Vấn đề 3. Tìm giá trị tham số để hàm số liên tục

Ví dụ 4 Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{nếu } x \neq 3 \\ a & \text{nếu } x=3. \end{cases}$

Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Giải

Với $x \neq 3$, $f(x) = x + 1$ là hàm đa thức nên hàm số $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty\ ;\ 3)$ và $(3\ ;\ +\infty)$.

Ta có: $f(3) = a$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (x+1) = 3+1 = 4$.

Để hàm số liên tục tại $x = 3$ thì $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$. Suy ra $a = 4$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $a = 4$.

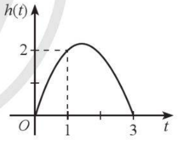
Vấn đề 4. Ứng dụng

Ví dụ 5 *Hình 5* biểu thị độ cao h (m) của một quả bóng được đá lên theo thời gian t (s), trong đó $h(t) = at^2 + bt$.

a) Dựa vào đồ thị, tìm a, b.

b) Chứng minh rằng hàm số $h(t)$ liên tục trên khoảng $(0\ ;\ 3)$.

c) Với m thuộc $(0\ ;\ 3)$, tính $\lim\limits_{t \to m} h(t)$. Cho biết ý nghĩa của kết quả.



Hình 5

Giải

a) Dựa vào *Hình 5* ta thấy quỹ đạo quả bóng đi qua điểm có toạ độ $(3\ ;\ 0)$ và $(1\ ;\ 2)$. Suy ra $a = -1$, $b = 3$.

b) Từ câu a, ta có: $h(t) = -t^2 + 3t$. Vì $h(t)$ là hàm đa thức nên $h(t)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, mà $(0\ ;\ 3) \subset \mathbb{R}$ nên $h(t)$ liên tục trên $(0\ ;\ 3)$.

c) Với $m \in (0\ ;\ 3)$, ta có: $\lim\limits_{t \to m} h(t) = \lim\limits_{t \to m} (-t^2 + 3t) = -m^2 + 3m = h(m)$. Khi dần tới thời điểm m bất kì thuộc $(0\ ;\ 3)$ thì quả bóng dần đạt độ cao $h(m)$.

Ví dụ 6 Một bãi đỗ xe tính phí 60 000 đồng cho giờ đầu tiên (hoặc một phần của giờ đầu tiên) và thêm 40 000 đồng cho mỗi giờ (hoặc một phần của mỗi giờ) tiếp theo, tối đa là 200 000 đồng.

a) Vẽ đồ thị hàm số $C = C(t)$ biểu thị chi phí theo thời gian đỗ xe.

b) Hàm số đó có liên tục trên $[0 ; +\infty)$ không?

c) Giá trị $\lim\limits_{t \to 3} C(t)$ có tồn tại không? Khi một người có thời gian đỗ xe tăng dần đến 3 giờ và một người có thời gian đỗ xe giảm dần đến 3 giờ thì chênh lệch chi phí giữa hai người có giảm đi không?

Giải

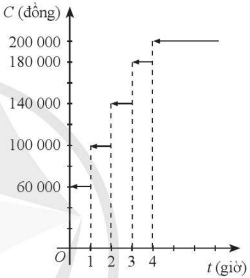
a) Đồ thị hàm số $C = C(t)$ được thể hiện trong *Hình 6.*

b) Từ đồ thị ta thấy hàm số bị gián đoạn tại $t = 1$ (giờ); $t = 2$ (giờ); $t = 3$ (giờ); $t = 4$ (giờ) nên hàm số không liên tục trên $[0 ; +\infty)$.

c) Từ đồ thị ta có:

$$\lim_{t \to 3^+} C(t) = 180\ 000, \quad \lim_{t \to 3^-} C(t) = 140\ 000.$$

Vì $\lim\limits_{t \to 3^+} C(t) \neq \lim\limits_{t \to 3^-} C(t)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{t \to 3} C(t)$.



Hình 6

Nhận thấy khi một người có thời gian đỗ xe tăng dần đến 3 giờ và một người có thời gian đỗ xe giảm dần đến 3 giờ thì chênh lệch chi phí giữa hai người luôn là 180 000 – 140 000 = 40 000 (đồng), như vậy chênh lệch chi phí giữa hai người không giảm đi.

C. BÀI TẬP

26. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = a$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = a$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = a$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = a$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

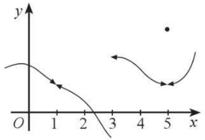
27. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ trong *Hình 7*. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại $x = 1$.

B. Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại $x = 3$.

C. Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại $x = 5$.

D. Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại $x = 0$.

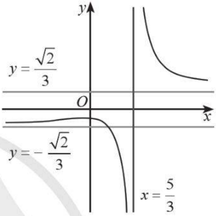


Hình 7

28. Quan sát đồ thị hàm số trong *Hình 8* và cho biết hàm số đó có liên tục:

a) Tại $x = \frac{5}{3}$ hay không.

b) Trên khoảng $(-\infty\ ;\ 0)$ hay không.



Hình 8

29. Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x) = -x^2 + \cos x$;

b) $g(x) = 3x^3 + 2 - \frac{3}{x+2}$;

c) $h(x) = \frac{2x+5}{x+2} + \frac{3x-1}{2x-4}$.

30. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{nếu } x \geq 1 \\ x + a & \text{nếu } x < 1. \end{cases}$

a) Với $a = 2$, xét tính liên tục của hàm số tại $x = 1$.

b) Tìm a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

31. Theo quyết định số 2019/QĐ-BĐVN ngày 01/11/2018 của Tổng công ty Bưu điện Việt Nam, giá cước dịch vụ Bưu chính phổ cập đối với dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp trong nước có khối lượng đến 250 g như trong bảng sau:

Khối lượng đến 250 g	**Mức cước (đồng)**
Đến 20 g	4 000
Trên 20 g đến 100 g	6 000
Trên 100 g đến 250 g	8 000

a) Hãy biểu diễn số tiền phải trả khi sử dụng dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp theo khối lượng của thư cơ bản và bưu thiếp.

b) Hàm số trên có liên tục trên tập xác định hay không?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

32. Cho $\lim u_n = 2$, $\lim v_n = 3$. Khi đó, $\lim(u_n + v_n)$ bằng:

A. 6. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 2.

33. Cho $\lim u_n = 3$, $\lim v_n = +\infty$. Khi đó $\lim\dfrac{v_n}{u_n}$ bằng:

A. 3. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

34. Cho hai dãy số với (u_n), (v_n) với $u_n = 1 - \dfrac{2}{n}$, $v_n = 4 + \dfrac{2}{n+2}$.

Khi đó, $\lim(u_n + \sqrt{v_n})$ bằng:

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

35. Biểu diễn dưới dạng phân số của 1,(7) là:

A. $\dfrac{7}{9}$. **B.** $\dfrac{10}{9}$. **C.** $\dfrac{10}{3}$. **D.** $\dfrac{16}{9}$.

36. Cho $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$. Khi đó, $\lim\limits_{x \to 2} 2f(x)$ bằng:

A. 5. **B.** 2. **C.** 10. **D.** 7.

37. Giả sử $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2$. Khi đó $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ bằng:

A. 4. **B.** 2. **C.** 6. **D.** Không tồn tại.

38. Nếu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ thì $\lim\limits_{x \to a} [-f(x)]$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** a. **D.** $-a$.

39. Quan sát đồ thị hàm số trong *Hình 9* và cho biết:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ bằng:

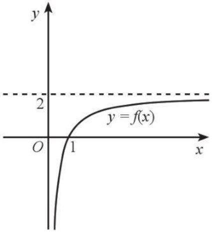
A. 2. **B.** 1.

C. $+\infty$. **D.** $-\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ bằng:

A. 2. **B.** 1.

C. $+\infty$. **D.** $-\infty$.



Hình 9

c) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng:

A. $(-\infty ; 1)$. **B.** $(-\infty ; +\infty)$. **C.** $(1 ; +\infty)$. **D.** $(-\infty ; 2)$.

40. Hàm số nào sau đây **không** liên tục trên tập xác định của nó?

A. $y = x$. **B.** $y = \dfrac{1}{x}$. **C.** $y = \sin x$. **D.** $y = \begin{cases} 0 \text{ nếu } x < 0 \\ 1 \text{ nếu } x \geq 0. \end{cases}$

41. Hàm số $y = \tan x$ gián đoạn tại bao nhiêu điểm trên khoảng $(0 ; 2\pi)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

42. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{2n-4}{5}$; b) $\lim \dfrac{1+\dfrac{1}{2n}}{2n}$; c) $\lim\left(2+\dfrac{7}{4^n}\right)$;

d) $\lim \dfrac{-4n^2-3}{2n^2-n+5}$; e) $\lim \dfrac{\sqrt{9n^2+2n+1}}{n-5}$; g) $\lim \dfrac{3^n+4 \cdot 9^n}{3 \cdot 4^n+9^n}$.

43*. Cho tam giác T_1 có diện tích bằng 1. Giả sử có tam giác T_2 đồng dạng với tam giác T_1, tam giác T_3 đồng dạng với tam giác T_2, ..., tam giác T_n đồng dạng với tam giác T_{n-1} với tỉ số đồng dạng $\dfrac{1}{k}$ $(k > 1)$. Khi n tiến tới vô cùng, tính tổng diện tích của tất cả các tam giác theo k.

44. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2+\dfrac{4}{3x}}{x^2-1}$; b) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x-2}$; c) $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{-5+x}{x+3}$;

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{14x+2}{-7x+1}$; e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{3x+5}$; g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x+2}$;

h) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$; i) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$; k) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{-x^2+4x-3}{x^2+3x-18}$.

45*. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ a & \text{nếu } x = 2. \end{cases}$

Tìm a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

46. Một bể chứa 5 000 l nước tinh khiết. Nước muối có chứa 30 gam muối trên mỗi lít nước được bơm vào bể với tốc độ 25 l/phút.

a) Chứng minh rằng nồng độ muối của nước trong bể sau t phút (tính bằng khối lượng muối chia thể tích nước trong bể, đơn vị: g/l) là $C(t)=\dfrac{30t}{200+t}$.

b) Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả đó.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

§1 GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

1. B. **2.** D. **3.** A. **4.** C. **5.** D.

6. Xét dãy số (u_n) có $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n^2}$. Giả sử h là số dương bé tuỳ ý cho trước. Ta có:

$|u_n|=\left|\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right|=\dfrac{1}{n^2}$. Do đó: $|u_n|<h \Leftrightarrow \dfrac{1}{n^2}<h \Leftrightarrow \dfrac{1}{n}<\sqrt{h} \Leftrightarrow n>\dfrac{1}{\sqrt{h}}$. Vậy với các số tự nhiên n lớn hơn $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ thì $|u_n|<h$. Suy ra $\lim\dfrac{(-1)^n}{n^2}=0$.

7. a) $\lim u_n=\lim\left(3-\dfrac{4}{n+1}\right)=\lim 3-\lim\dfrac{4}{n+1}=3;$

$\lim v_n=\lim\left(8-\dfrac{5}{3n^2+2}\right)=\lim 8-\lim\dfrac{5}{3n^2+2}=8.$

b) $\lim(u_n+v_n)=\lim u_n+\lim v_n=3+8=11;$

$\lim(u_n-v_n)=\lim u_n-\lim v_n=3-8=-5;$

$\lim(u_n\,.\,v_n)=\lim u_n\,.\,\lim v_n=3\,.\,8=24;$ $\lim\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{\lim u_n}{\lim v_n}=\dfrac{3}{8}.$

8. a) $+\infty$. b) $-\infty$. c) 0. d) 6.

9. a) 2. b) $-\dfrac{1}{4}$. c) $\lim\dfrac{n^3-5n+1}{3n^2-4n+2}=\lim\dfrac{1-\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{3}{n}-\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{2}{n^3}}=+\infty.$ d) 0.

e) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+n+1}}{8n+3} = \lim \dfrac{\sqrt{4+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}}{8+\dfrac{3}{n}} = \dfrac{1}{4}$.

g) $\lim \dfrac{4^n+5^n}{3 \,.\, 4^n - 4 \,.\, 5^n} = \lim \dfrac{\left(\dfrac{4}{5}\right)^n + 1}{3 \,.\left(\dfrac{4}{5}\right)^n - 4} = -\dfrac{1}{4}$.

10. a) $\dfrac{15}{16}$.   b) $\dfrac{7}{3}$.

11. a) Theo đề bài, $h_n = \dfrac{1}{4}h_{n-1}$ nên (h_n) là một cấp số nhân với $h_1 = 25$, công bội $q = \dfrac{1}{4}$. Suy ra số hạng tổng quát của dãy số (h_n): $h_n = \dfrac{100}{4^n}$.

b) Ta có: $\lim h_n = \lim \dfrac{100}{4^n} = \lim 100 \,.\, \lim \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 100 \,.\, 0 = 0$. Từ giới hạn đó, ta rút ra được ý nghĩa: Khi n càng dần tới vô cực thì độ cao của quả bóng đạt được sau khi nảy ngày càng nhỏ và độ cao đó dần tới 0.

c) Ta có: $S_n = 100 + 2.\left(\dfrac{100}{4} + \dfrac{100}{4^2} + \dfrac{100}{4^3} + \ldots + \dfrac{100}{4^n}\right)$

Nếu quá trình bóng nảy cứ tiếp tục diễn ra mãi, tổng quãng đường quả bóng di chuyển được là: $\lim S_n = 100 + 2.\left(\dfrac{100}{4} + \dfrac{100}{4^2} + \dfrac{100}{4^3} + \ldots + \dfrac{100}{4^n} + \ldots\right)$

Vì $\dfrac{100}{4}; \dfrac{100}{4^2}; \dfrac{100}{4^3}; \ldots; \dfrac{100}{4^n}; \ldots$ lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = \dfrac{100}{4}$ và công bội $q = \dfrac{1}{4} < 1$ nên ta có $\lim S_n = 100 + 2.\dfrac{\dfrac{100}{4}}{1-\dfrac{1}{4}} = \dfrac{500}{3}$. Vậy tổng quãng đường quả bóng di chuyển được là $\dfrac{500}{3}$ m.

§2 GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

12. D. **13.** A. **14.** A. **15.** C. **16.** A.

17. a) Xét hàm số $f(x) = x^3$. Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, thoả mãn $\lim x_n = -2$.

Ta có: $\lim f(x_n) = \lim x_n^3 = (-2)^3 = -8$. Vậy $\lim\limits_{x \to -2} x^3 = -8$.

b) Xét hàm số $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$.

Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, thoả mãn $x_n \neq -2$ và $\lim x_n = -2$.

Ta có: $\lim g(x_n) = \lim \dfrac{x_n^2 - 4}{x_n + 2} = \lim(x_n - 2) = -4$. Vậy $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$.

18. a) $\lim\limits_{x \to 3} 3f(x) = \lim\limits_{x \to 3} 3 \,.\, \lim\limits_{x \to 3} f(x) = 3 \,.\, 4 = 12.$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)}{4} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 3} f(x)}{\lim\limits_{x \to 3} 4} = \dfrac{4}{4} = 1.$ c) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{f(x)} = \sqrt{4} = 2$.

19. Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$;

$\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x) = +\infty$.

20. a) -6. b) 1. c) $\sqrt{26}$. d) 0. e) $-\infty$. g) $+\infty$.

21. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-5x + 2}{3x + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-5 + \frac{2}{x}}{3 + \frac{1}{x}} = \dfrac{-5}{3}$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x + 3}{3x^2 + 2x + 5} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\frac{-2}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} = 0$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2 + 3}}{x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{|x| \,.\, \sqrt{9 + \frac{3}{x^2}}}{x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x \,.\, \sqrt{9 + \frac{3}{x^2}}}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 3$.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2 + 3}}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x| \,.\, \sqrt{9 + \frac{3}{x^2}}}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(-x) \,.\, \sqrt{9 + \frac{3}{x^2}}}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = -3$.

e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(2x-6)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x-6}{x+1} = -2.$

g) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{-x^2 + 2x + 15}{x^2 + 4x + 3} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(5-x)(x+3)}{(x+1)(x+3)} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{5-x}{x+1} = -4.$

22. a) Nếu $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) - 4] \neq 0$ thì $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)-4}{x-1} = -\infty$ hoặc $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)-4}{x-1} = +\infty$.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) - 4] = 0$. Suy ra $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$.

b) $\lim\limits_{x \to 1} 3f(x) = 12.$

23*. Ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xf(x)}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{1 + \dfrac{1}{x}} = \dfrac{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)}{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)}$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)}{\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}} = \frac{2\ 022}{1+0} = 2\ 022.$$

24*. Ta có: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-3}{2f(x)+1} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{1 - \dfrac{3}{f(x)}}{2 + \dfrac{1}{f(x)}} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} 1 - \lim\limits_{x \to a} \dfrac{3}{f(x)}}{\lim\limits_{x \to a} 2 + \lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)}} = \dfrac{1-0}{2+0} = \dfrac{1}{2}.$

25. Ta có: $\lim\limits_{t \to 10} \dfrac{g(t) - g(10)}{t - 10} = \lim\limits_{t \to 10} \dfrac{45t^2 - t^3 - 45 \,.\, 10^2 + 10^3}{t-10}$

$$= \lim\limits_{t \to 10} \frac{45(t-10)(t+10) - (t-10)(t^2 + 10t + 100)}{t-10}$$

$$= \lim\limits_{t \to 10} (-t^2 + 35t + 350) = 600\,.$$

Từ kết quả trên, ta thấy tốc độ gia tăng người bệnh ngay tại thời điểm $t = 10$ (ngày) là 600 người/ngày.

§3 HÀM SỐ LIÊN TỤC

26. A. **27. D.**

28. Dựa vào đồ thị, ta có:

a) Hàm số không liên tục tại $x=\dfrac{5}{3}$ vì giá trị hàm số không xác định tại $x=\dfrac{5}{3}$.

b) Hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty\,;\,0)$.

29. a) Vì hai hàm số $y=-x^2$ và $y=\cos x$ đều liên tục trên tập xác định của chúng là $\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)=-x^2+\cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Vì hàm số $y=3x^3+2$ liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=\dfrac{3}{x+2}$ liên tục trên hai khoảng $(-\infty\,;-2)$ và $(-2\,;+\infty)$ nên hàm số $g(x)=3x^3+2-\dfrac{3}{x+2}$ liên tục trên hai khoảng $(-\infty\,;-2)$ và $(-2\,;+\infty)$.

c) Vì hàm số $y=\dfrac{2x+5}{x+2}$ liên tục trên hai khoảng $(-\infty\,;-2)$ và $(-2\,;+\infty)$, hàm số $y=\dfrac{3x-1}{2x-4}$ liên tục trên hai khoảng $(-\infty\,;2)$ và $(2\,;+\infty)$ nên hàm số $h(x)=\dfrac{2x+5}{x+2}+\dfrac{3x-1}{2x-4}$ liên tục trên các khoảng $(-\infty\,;-2)$, $(-2\,;2)$, $(2\,;+\infty)$.

30. a) Với $a=2$, ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=3$. Suy ra không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. Vậy hàm số không liên tục tại $x=1$.

b) Với $x<1$ thì $f(x)=x+a$ liên tục trên $(-\infty\,;1)$. Với $x>1$ thì $f(x)=x^2-x$ liên tục trên $(1\,;+\infty)$. Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số liên tục tại $x=1$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=0$.

Như vậy, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+a)=1+a=0\Rightarrow a=-1$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $a=-1$.

31. a) Ta có hàm số: $f(x)=\begin{cases}4\,000 & \text{nếu } 0<x\le 20\\ 6\,000 & \text{nếu } 20<x\le 100\\ 8\,000 & \text{nếu } 100<x\le 250.\end{cases}$

b) Tập xác định của hàm số trên là $(0\,;250]$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 20^-} f(x)=4\,000$, $\lim\limits_{x\to 20^+} f(x)=6\,000$. Suy ra không tồn tại $\lim\limits_{x\to 20} f(x)$. Do đó, hàm số không liên tục tại $x=20$. Vậy hàm số không liên tục trên tập xác định $(0\,;250]$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

32. B. **33. C.** **34. A.** **35. D.** **36. C.** **37. D.**

38. B. **39.** a) **A.** b) **D.** c) **C.** **40. D.** **41. C.**

42. a) $+\infty$. b) 0. c) 2. d) -2. e) 3. g) 4.

43*. Kí hiệu diện tích tam giác T_n là S_n.

Vì tam giác T_n đồng dạng với tam giác T_{n-1} với tỉ số đồng dạng $\frac{1}{k}$ nên diện tích tam giác T_n bằng $\frac{1}{k^2}$ diện tích tam giác T_{n-1} hay $S_n = \frac{1}{k^2}S_{n-1}$.

Vì $k > 1$ nên $\frac{1}{k^2} < 1$. Vậy $S_1; S_2; \ldots; S_{n-1}; \ldots$ lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn có $S_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{k^2}$.

Khi đó, tổng diện tích của tất cả các tam giác nếu n tiến tới vô cùng là:

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-1} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{k^2}} = \frac{k^2}{k^2-1}.$$

44. a) 0. b) $+\infty$. c) $-\infty$. d) -2. e) $-\infty$.

g) -2. h) $\frac{1}{2}$. i) -1. k) $-\frac{2}{9}$.

45*. Với $x \neq 2$ thì $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ liên tục trên hai khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số liên tục tại $x = 2$.

Khi đó $f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} (x+2) = 4$. Suy ra $a = 4$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $a = 4$.

46. a) Sau t phút thì lượng muối trong bể là $30 . 25 . t = 750t$ (g) và thể tích nước trong bể là $5\,000 + 25t$ (l). Vậy nồng độ muối của nước trong bể sau t phút là:

$$C(t) = \frac{750t}{5\,000 + 25t} = \frac{30t}{200+t} \text{ (g/}l\text{)}.$$

b) Ta có: $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{30t}{200+t} = 30$. Theo kết quả đó, ta thấy khi lượng nước trong bể tăng theo thời gian đến vô hạn thì nồng độ muối của nước sẽ tăng dần đến giá trị 30 g/l, tức là xấp xỉ nồng độ muối của loại nước muối cho thêm vào bể.

Chương IV

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

§1 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Quy tắc vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian

- Đường thẳng được biểu diễn bởi đường thẳng. Đoạn thẳng được biểu diễn bởi đoạn thẳng;
- Hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau) được biểu diễn bởi hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau);
- Hình biểu diễn giữ nguyên tính liên thuộc giữa điểm với đường thẳng hoặc với đoạn thẳng;
- Những đường nhìn thấy được vẽ bằng nét liền, những đường không nhìn thấy được vẽ bằng nét đứt.

2. Các tính chất thừa nhận của hình học không gian

- **Tính chất 1:** Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước
- **Tính chất 2:** Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.
- **Tính chất 3:** Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều nằm trong mặt phẳng đó.
- **Tính chất 4:** Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.
- **Tính chất 5:** Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.
- **Tính chất 6:** Trên mỗi mặt phẳng của không gian, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

3. Một số cách xác định mặt phẳng

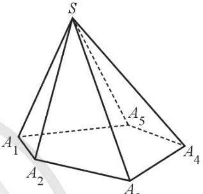
Mặt phẳng được xác định theo một số cách sau:

- Đi qua ba điểm không thẳng hàng;
- Đi qua một đường thẳng và một điểm nằm ngoài đường thẳng đó;
- Đi qua hai đường thẳng cắt nhau.

4. Hình chóp và hình tứ diện

a) Hình chóp

Trong mặt phẳng (P), cho đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ $(n \geq 3)$. Lấy điểm S nằm ngoài (P). Nối S với các đỉnh A_1, A_2, ..., A_n ta được n tam giác: SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1. Hình gồm đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1 gọi là *hình chóp* (minh hoạ ở *Hình 1*), kí hiệu $S.A_1A_2\ldots A_n$.



Hình 1

Trong hình chóp $S.A_1A_2\ldots A_n$, ta có:

– Điểm S gọi là đỉnh;

– Đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ gọi là *mặt đáy*;

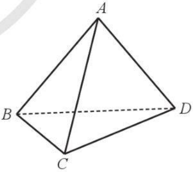
– Các cạnh của mặt đáy gọi là *cạnh đáy*;

– Các đoạn thẳng SA_1, SA_2, ..., SA_n gọi là các *cạnh bên*;

– Các tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1 gọi là các *mặt bên*.

b) Hình tứ diện

Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trong một mặt phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD và BCD gọi là *hình tứ diện* (hay ngắn gọn là *tứ diện*) (*Hình 2*), kí hiệu $ABCD$.



Hình 2

Trong hình tứ diện $ABCD$, ta có:

– Các điểm A, B, C, D gọi là các đỉnh;

– Các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, CA, BD gọi là các *cạnh*;

– Hai cạnh không có điểm chung gọi là *hai cạnh đối diện*;

– Các tam giác ABC, ACD, ABD, BCD gọi là các *mặt*;

– Đỉnh không nằm trên một mặt gọi là đỉnh đối diện với mặt đó.

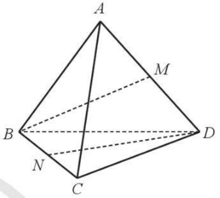
Chú ý

– Hình tứ diện có các mặt là tam giác đều gọi là *hình tứ diện đều*.

– Mỗi hình chóp tam giác là một hình tứ diện.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC (*Hình 3*). Hỏi bốn điểm B, M, D, N có cùng thuộc một mặt phẳng hay không?



Hình 3

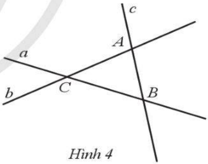
Giải

Giả sử bốn điểm B, M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng. Khi đó, M thuộc mặt phẳng (BDN) hay M thuộc mặt phẳng (BCD). Do đó, đường thẳng MD nằm trong mặt phẳng (BCD). Suy ra, điểm A thuộc mặt phẳng (BCD), mâu thuẫn với giả thiết $ABCD$ là tứ diện. Vậy bốn điểm B, M, D, N không cùng thuộc một mặt phẳng.

Ví dụ 2 Cho ba đường thẳng a, b, c không cùng nằm trong một mặt phẳng và đôi một cắt nhau. Chứng minh rằng ba đường thẳng a, b, c cùng đi qua một điểm, hay còn gọi là ba đường thẳng a, b, c đồng quy.

Giải

Giả sử ba đường thẳng a, b, c không cùng đi qua một điểm. Gọi A là giao điểm của b và c, B là giao điểm của c và a, C là giao điểm của a và b (*Hình 4*). Khi đó, A, B, C đôi một phân biệt. Qua hai đường thẳng cắt nhau a và b có một mặt phẳng (P). Đường thẳng c đi qua hai điểm phân biệt A, B của (P) nên c nằm trong (P).



Hình 4

Suy ra ba đường thẳng a, b, c cùng nằm trong một mặt phẳng, mâu thuẫn với giả thiết. Vậy ba đường thẳng a, b, c cùng đi qua một điểm.

Ví dụ 3 Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy không là hình thang. Gọi M là trung điểm của SA.

a) Xác định giao điểm K của đường thẳng CD với mặt phẳng (SAB).

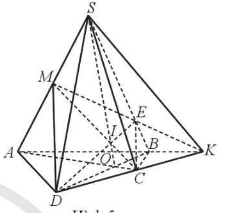
b) Xác định giao điểm E của đường thẳng SB với mặt phẳng (MCD).

c) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

d) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MCD) và (SBC).

e) Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của MC và DE. Chứng minh rằng ba điểm S, I, O thẳng hàng.

Giải (*Hình 5*)



Hình 5

a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi K là giao điểm của AB và CD.

Vì $K \in AB$ nên $K \in (SAB)$.

Vậy K là giao điểm của đường thẳng CD với mặt phẳng (SAB).

b) Trong mặt phẳng (SAB), gọi E là giao điểm của MK và SB.

Vì $E \in MK$, $MK \subset (MCD)$ nên $E \in (MCD)$. Vậy E là giao điểm của đường thẳng SB với mặt phẳng (MCD).

c) Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) có điểm S chung. Do $K \in CD$ nên $K \in (SCD)$. Mà $K \in (SAB)$. Suy ra K là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng SK.

d) Hai mặt phẳng (MCD) và (SBC) có điểm C chung. Do $E \in SB$ nên $E \in (SBC)$. Mà $E \in (MCD)$. Suy ra E là điểm chung của hai mặt phẳng (MCD) và (SBC). Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (MCD) và (SBC) là đường thẳng CE.

e) Ta có S và O cùng thuộc hai mặt phẳng (SAC) và (SBD). Mặt khác ta có:

$I \in MC$ nên $I \in (SAC)$, $I \in DE$ nên $I \in (SBD)$.

Suy ra ba điểm S, I, O cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt (SAC) và (SBD) nên S, I, O nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng đó. Vậy ba điểm S, I, O thẳng hàng.

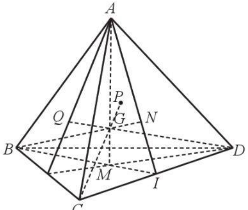
Ví dụ 4 Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm của cạnh CD và M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD.

a) Chứng minh rằng các điểm M, N thuộc mặt phẳng (ABI).

b) Gọi G là giao điểm của AM và BN. Chứng minh rằng: $\dfrac{GM}{GA} = \dfrac{GN}{GB} = \dfrac{1}{3}$.

c) Gọi P, Q lần lượt là trọng tâm các tam giác DAB, ABC. Chứng minh rằng các đường thẳng CP, DQ cùng đi qua điểm G và $\dfrac{GP}{GC} = \dfrac{GQ}{GD} = \dfrac{1}{3}$.

Giải (*Hình 6*)



Hình 6

a) Do M là trọng tâm của tam giác BCD nên $M \in BI$. Suy ra $M \in (ABI)$. Tương tự, $N \in AI$ nên $N \in (ABI)$. Vậy các điểm M, N thuộc mặt phẳng (ABI).

b) Do M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD nên $\frac{IM}{MB} = \frac{IN}{NA} = \frac{1}{2}$. Xét tam giác ABI, ta có: $\frac{IM}{MB} = \frac{IN}{NA}$ nên theo định lí Thalès đảo, suy ra $MN \parallel AB$.

Theo định lí Thalès trong tam giác, ta có:

$\frac{GM}{GA} = \frac{GN}{GB} = \frac{MN}{AB} = \frac{IM}{IB} = \frac{1}{3}$.

c) Chứng minh tương tự câu b, ta có AM và DQ cắt nhau tại điểm G' và $\frac{G'M}{G'A} = \frac{G'Q}{G'D} = \frac{1}{3}$. Suy ra $G' \equiv G$. Do đó, DQ đi qua G và $\frac{GQ}{GD} = \frac{1}{3}$.

Chứng minh tương tự, ta có CP đi qua G và $\frac{GP}{GC} = \frac{1}{3}$.

C. BÀI TẬP

1. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SC. Trong các mặt phẳng sau, điểm M nằm trên mặt phẳng nào?

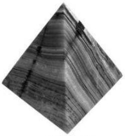
A. $(ABCD)$. **B.** (SAC). **C.** (SAB). **D.** (SAD).

2. Cho hình tứ diện $ABCD$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (CDA) là đường thẳng:

A. AB. **B.** BD. **C.** CD. **D.** AC.

3. Một đồ vật trang trí có bốn mặt phân biệt là các tam giác (*Hình 7*). Vẽ hình biểu diễn của đồ vật đó.

4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, C, D không cùng nằm trong một mặt phẳng.


Hình 7

5. Cho hai mặt phẳng (P), (Q) cắt nhau theo giao tuyến d và hai đường thẳng a, b lần lượt nằm trong (P), (Q). Chứng minh rằng nếu hai đường thẳng a, b cắt nhau thì giao điểm của chúng thuộc đường thẳng d.

6. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AC, CD lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $CE = 3EA$, $DF = 2FC$.

   a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (BEF) với các mặt phẳng (ABC), (ACD), (BCD).

   b) Xác định giao điểm K của đường thẳng AD với mặt phẳng (BEF).

   c) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (BEF) và (ABD).

7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, BC, CD.

   a) Xác định giao điểm của đường thẳng NP với mặt phẳng (SAB).

   b) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt phẳng (SAB), (SAD), (SBC), (SCD).

8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC.

   a) Xác định giao điểm I của đường thẳng MP với mặt phẳng (SBD).

   b) Xác định giao điểm Q của đường thẳng SD với mặt phẳng (MNP).

9. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy không là hình thang. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Trên SO lấy điểm I sao cho $SI = 2IO$.

   a) Xác định các giao điểm M, N lần lượt của SA, SD với mặt phẳng (IBC).

   b*) Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BC và MN đồng quy.

§2 HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

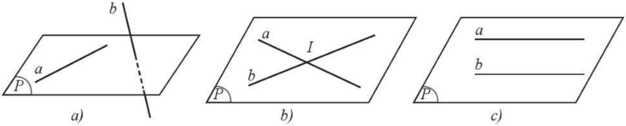
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng phân biệt

Cho hai đường thẳng a và b phân biệt trong không gian. Khi đó chỉ xảy ra một trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Có một mặt phẳng chứa a và b. Khi đó ta nói a và b *đồng phẳng*.

Trường hợp 2: Không có mặt phẳng nào chứa a và b. Khi đó ta nói a và b *chéo nhau*, hay *a chéo với b* (*Hình 8a*).



Hình 8

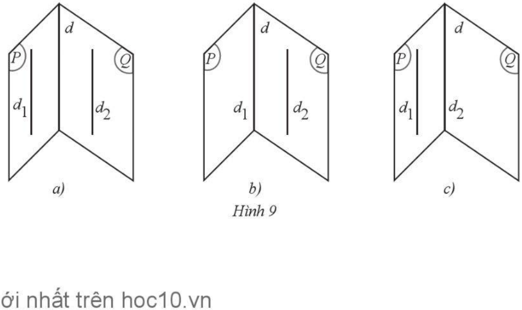
Khi hai đường thẳng (phân biệt) đồng phẳng, ta đã biết có hai khả năng xảy ra:

- a và b có một điểm chung duy nhất I (*Hình 8b*). Ta nói a và b *cắt nhau* tại I và kí hiệu là $a \cap b = \{I\}$. Ta còn có thể viết $a \cap b = I$.
- a và b không có điểm chung (*Hình 8c*). Ta nói a và b *song song với nhau* và kí hiệu là $a \parallel b$.

Nhận xét: Cho hai đường thẳng song song a và b. Có duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó, kí hiệu là mp(a, b).

2. Tính chất

- **Định lí 1:** Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.
- **Định lí 2 (về giao tuyến của ba mặt phẳng):** Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy, hoặc đôi một song song với nhau.
- **Hệ quả của Định lí 2:** Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó (minh hoạ ở *Hình 9*).



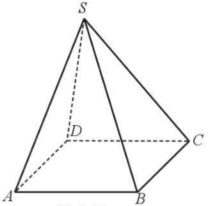
Hình 9

• **Định lí 3:** Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

Ví dụ 1 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành (*Hình 10*). Hãy xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau: AD và BC; SB và CD.



Hình 10

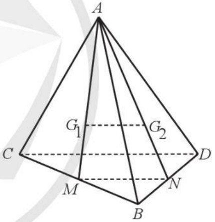
Giải

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên AD và BC song song với nhau.

Vì bốn điểm S, A, B, C không cùng nằm trên một mặt phẳng nên hai đường thẳng SB và CD chéo nhau.

Vấn đề 2. Chứng minh hai đường thẳng song song

Ví dụ 2 Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng hai đường thẳng G_1G_2 và CD song song với nhau.



Hình 11

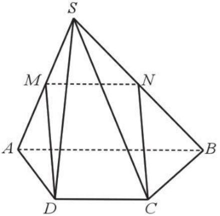
Giải. (*Hình 11*)

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và BD. Ta có:

$$M \in AG_1 \text{ và } \frac{AG_1}{AM} = \frac{2}{3}; \quad N \in AG_2 \text{ và } \frac{AG_2}{AN} = \frac{2}{3}.$$

Do đó $\frac{AG_1}{AM} = \frac{AG_2}{AN}$, suy ra $G_1G_2 \parallel MN$. Mặt khác, MN là đường trung bình của tam giác BCD nên $MN \parallel CD$. Vậy $G_1G_2 \parallel CD$.

Ví dụ 3 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB là đáy lớn và $AB = 2CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và SB. Chứng minh rằng đường thẳng NC song song với đường thẳng MD.



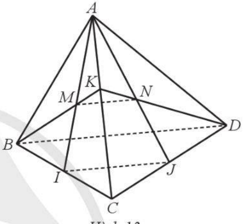
Hình 12

Giải. (*Hình 12*)

Do MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN \parallel AB$ và $MN = \frac{1}{2}AB$.

Theo giả thiết, ta có $CD \parallel AB$ và $CD = \frac{1}{2}AB$. Từ đó suy ra $MN \parallel CD$ và $MN = CD$, hay tứ giác $MNCD$ là hình bình hành. Vậy $NC \parallel MD$.

Ví dụ 4 Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD. Trên cạnh AC lấy điểm K. Gọi M là giao điểm của BK và AI, N là giao điểm của DK và AJ. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với đường thẳng BD.



Hình 13

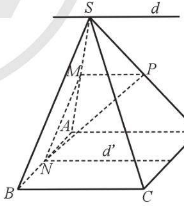
Giải. (*Hình 13*)

Ba mặt phẳng (AIJ), (BCD), (BKD) phân biệt đôi một cắt nhau theo các giao tuyến IJ, BD, MN.

Trong tam giác BCD ta có IJ là đường trung bình nên $IJ \parallel BD$. Theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng, ta có ba đường thẳng IJ, BD, MN đôi một song song. Vậy đường thẳng MN song song với đường thẳng BD.

Vấn đề 3. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

Ví dụ 5 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, AB, SD. Xác định giao tuyến của mỗi cặp mặt phẳng sau: (SAD) và (SBC); (MNP) và $(ABCD)$.



Hình 14

Giải. (*Hình 14*)

a) Hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có điểm chung S và lần lượt chứa hai đường thẳng song song là AD, BC nên giao tuyến của chúng là đường thẳng d đi qua S và song song với AD, BC.

b) Do MP là đường trung bình của tam giác SAD nên $MP \parallel AD$. Hai mặt phẳng (MNP) và $(ABCD)$ có điểm chung N và lần lượt chứa hai đường thẳng song song là MP, AD nên giao tuyến của chúng là đường thẳng d' đi qua N và song song với AD, MP.

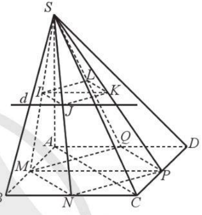
Ví dụ 6 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA; I, J, K, L lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SM, SN, SP, SQ.

a) Chứng minh rằng bốn điểm I, J, K, L đồng phẳng và tứ giác $IJKL$ là hình bình hành.

b) Chứng minh rằng $IK \parallel BC$.

c) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng $(IJKL)$ và (SBC).

Giải (*Hình 15*)



Hình 15

a) Vì MN, QP lần lượt là đường trung bình của các tam giác BAC, DAC nên $MN \parallel AC$ và $MN = \frac{1}{2}AC$, $QP \parallel AC$ và $QP = \frac{1}{2}AC$. Do đó, $MN \parallel QP$ và $MN = QP$.

Vì IJ, LK lần lượt là đường trung bình của các tam giác SMN, SQP nên $IJ \parallel MN$ và $IJ = \frac{1}{2}MN$, $LK \parallel QP$ và $LK = \frac{1}{2}QP$.

Do đó, $IJ \parallel LK$ và $IJ = LK$.

Vậy bốn điểm I, J, K, L đồng phẳng và tứ giác $IJKL$ là hình bình hành.

b) Vì IK là đường trung bình của tam giác SMP nên $IK \parallel MP$. Mà $MP \parallel BC$ nên $IK \parallel BC$.

c) Hai mặt phẳng $(IJKL)$ và (SBC) có điểm chung J và lần lượt chứa hai đường thẳng IK, BC song song với nhau nên giao tuyến của hai mặt phẳng $(IJKL)$ và (SBC) là đường thẳng d đi qua J và song song với IK, BC.

C. BÀI TẬP

10. Hai đường thẳng chéo nhau khi và chỉ khi:

A. Hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.

B. Hai đường thẳng không có điểm chung.

C. Hai đường thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng nào.

D. Hai đường thẳng cùng chéo nhau với đường thẳng thứ ba.

11. Cho ba đường thẳng a, b, c. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu a và b cùng song song với c thì a song song với b.

B. Nếu a và b cùng chéo nhau với c thì a và b chéo nhau.

C. Nếu a song song với b, b và c chéo nhau thì a và c chéo nhau hoặc cắt nhau.

D. Nếu a và b cắt nhau, b và c cắt nhau thì a và c cắt nhau.

12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào song song với MN?

A. AB. **B.** AD. **C.** BD. **D.** AC.

13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (CMN) và (BCD) là đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

A. BD. **B.** CD. **C.** BC. **D.** AB.

14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào **không** song song với NP?

A. MQ. **B.** BD. **C.** AD. **D.** BC.

15. Quan sát hình căn phòng (*Hình 16*), hãy cho biết vị trí tương đối của các cặp đường thẳng a và b; a và c; b và c.

Hình 16

16. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD và P là một điểm nằm trên CD. Đường thẳng BC cắt mặt phẳng (MNP) tại Q. Chứng minh rằng $PQ \parallel BD$.

17. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB và SAD; M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Chứng minh rằng $GK \parallel MN$.

18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, K, L lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SAD.

a) Chứng minh rằng bốn điểm I, J, K, L đồng phẳng và tứ giác $IJKL$ là hình bình hành.

b) Chứng minh rằng $JL \parallel CD$.

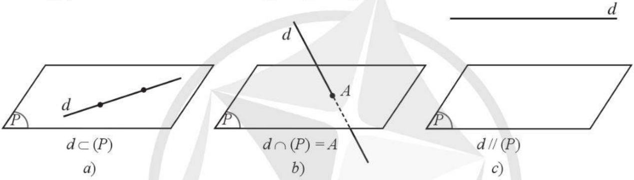
c) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng $(IJKL)$ và (SCD).

§3 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

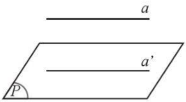
- Đường thẳng được gọi là *nằm trong* mặt phẳng nếu chúng có từ hai điểm chung trở lên (*Hình 17a* biểu diễn d nằm trong (P)).
- Đường thẳng được gọi là *cắt nhau* với mặt phẳng nếu chúng có một điểm chung duy nhất (*Hình 17b* biểu diễn d và (P) cắt nhau).
- Đường thẳng được gọi là *song song* với mặt phẳng nếu chúng không có điểm chung (*Hình 17c* biểu diễn d song song với (P)).



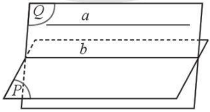
Hình 17

2. Điều kiện và tính chất

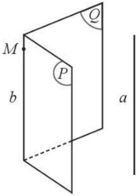
- **Định lí 1 (dấu hiệu nhận biết một đường thẳng song song với một mặt phẳng):** Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và a song song với đường thẳng a' nằm trong (P) thì a song song với (P) (*Hình 18*).



Hình 18



Hình 19



Hình 20

- **Định lí 2 (tính chất của đường thẳng song song với mặt phẳng):** Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Nếu mặt phẳng (Q) chứa a và cắt (P) theo giao tuyến b thì b song song với a (*Hình 19*).

• **Hệ quả của Định lí 2:** Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

Ví dụ: Cho hai mặt phẳng phân biệt (P), (Q) cắt nhau theo giao tuyến b và đường thẳng a. Nếu $a \parallel (P)$ và $a \parallel (Q)$ thì $a \parallel b$ (*Hình 20*).

***Chú ý*:** Cho hai đường thẳng chéo nhau. Khi đó có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

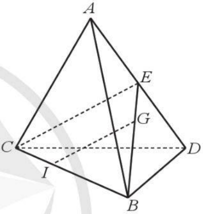
Ví dụ 1 Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, điểm I nằm trên cạnh BC sao cho $BI = 2IC$. Chứng minh rằng đường thẳng IG song song với mặt phẳng (ACD).

Giải. (*Hình 21*)

Gọi E là trung điểm AD. Ta có $E \in BG$ và $\dfrac{BG}{BE} = \dfrac{2}{3}$;

Vì $BI = 2IC$ nên $\dfrac{BI}{BC} = \dfrac{2}{3}$. Do đó $\dfrac{BI}{BC} = \dfrac{BG}{BE} = \dfrac{2}{3}$.

Suy ra $IG \parallel CE$. Mà $CE \subset (ACD)$ nên $IG \parallel (ACD)$.



Hình 21

Ví dụ 2 Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Gọi O và O' lần lượt là giao điểm hai đường chéo của mỗi hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$. Chứng minh rằng đường thẳng OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

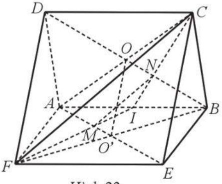
b) Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABF và ABC. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với mặt phẳng (ACF).

Giải. (*Hình 22*)

a) Do OO' là đường trung bình của tam giác BDF nên $OO' \parallel DF$. Mà $DF \subset (ADF)$ nên $OO' \parallel (ADF)$.

Tương tự ta có $OO' \parallel (BCE)$.

b) Gọi I là trung điểm của AB. Vì M, N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABF và ABC nên ta có: $I \in FM$ và $\dfrac{IM}{IF} = \dfrac{1}{3}$; $I \in CN$ và $\dfrac{IN}{IC} = \dfrac{1}{3}$.



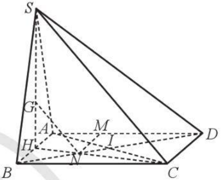
Hình 22

Do đó $\frac{IM}{IF} = \frac{IN}{IC} = \frac{1}{3}$. Suy ra $MN \,//\, FC$.

Mà $FC \subset (ACF)$ nên $MN \,//\, (ACF)$.

Ví dụ 3 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho $AD = 3AM$. Gọi G, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, ABC.

Chứng minh rằng hai đường thẳng MN, NG lần lượt song song với các mặt phẳng (SCD), (SAC).



Hình 23

Giải. (*Hình 23*)

Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

Do N là trọng tâm tam giác ABC nên $\frac{BN}{BI} = \frac{2}{3}$.

Suy ra $\frac{BN}{BD} = \frac{1}{3}$, mà $\frac{AM}{AD} = \frac{1}{3}$ nên $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BD}$.

Do đó $MN \,//\, AB$ hay $MN \,//\, CD$. Mà $CD \subset (SCD)$ nên $MN \,//\, (SCD)$.

Gọi H là trung điểm của AB. Vì G, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB, ABC nên ta có: $H \in SG$ và $\frac{HG}{HS} = \frac{1}{3}$; $H \in CN$ và $\frac{HN}{HC} = \frac{1}{3}$. Do đó $\frac{HG}{HS} = \frac{HN}{HC}$ suy ra $GN \,//\, SC$. Mà $SC \subset (SAC)$ nên $GN \,//\, (SAC)$.

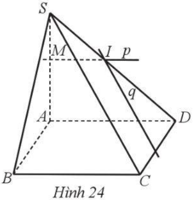
Vấn đề 2. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

Ví dụ 4 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên cạnh SA lấy điểm M. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với hai đường thẳng AD và SC. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt phẳng (SAD), (SCD).

Giải. (*Hình 24*)

Vì mặt phẳng (P) đi qua M và song song với AD, mà $AD \subset (SAD)$ nên (P) cắt mặt phẳng (SAD) theo giao tuyến p đi qua M và song song với AD.

Gọi I là giao điểm của đường thẳng p với SD, khi đó I thuộc mặt phẳng (P). Mặt phẳng (P) đi qua I và song song với SC, mà $SC \subset (SCD)$ nên (P) cắt mặt phẳng (SCD) theo giao tuyến q đi qua I và song song với SC.



Hình 24

C. BÀI TẬP

19. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng a và cắt (P) theo giao tuyến b. Vị trí tương đối giữa a và b là:

A. Cắt nhau. **B.** Trùng nhau. **C.** Song song. **D.** Chéo nhau.

20. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Nếu có mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng a và cắt (P) theo giao tuyến b thì b song song với a.

B. Trong mặt phẳng (P) có vô số đường thẳng chéo nhau với a.

C. Đường thẳng a không có điểm chung với mặt phẳng (P).

D. Trong mặt phẳng (P) có duy nhất một đường thẳng song song với a.

21. Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và song song với b?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

22. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACD, điểm M nằm trên cạnh AB sao cho $AM = 2MB$. Đường thẳng MG song song với mặt phẳng:

A. (ACD). **B.** (ABD). **C.** (BCD). **D.** (ABC).

23. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, BC, CD. Chứng minh rằng giao tuyến của hai mặt phẳng (APQ) và (CMN) song song với đường thẳng BD.

24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, SB.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (CDN).

b) Chứng minh rằng đường thẳng CN song song với mặt phẳng (SAM).

25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, SA.

a) Chứng minh rằng SC song song với mặt phẳng (MNP).

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SCD).

26*. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm chuyển động trên cạnh SC (M khác C), (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng AM và song song với BD. Chứng minh rằng mặt phẳng (P) luôn đi qua một đường thẳng cố định khi điểm M chuyển động trên cạnh SC.

27. Trong các không gian hẹp, người ta thường thiết kế tủ đựng quần áo có cánh cửa trượt. Tủ này bao gồm khoang tủ, cánh cửa trượt và hai đường ray trượt cho mép trên và mép dưới cánh cửa (*Hình 25*). Biết rằng cánh cửa trượt có dạng hình chữ nhật và có thể kéo trượt bình thường, khi đó bạn Minh nói: "Đường ray trượt ở mép trên cửa song song với mặt đáy của tủ quần áo". Em hãy cho biết phát biểu của bạn Minh đúng hay sai? Vì sao?

Hình 25

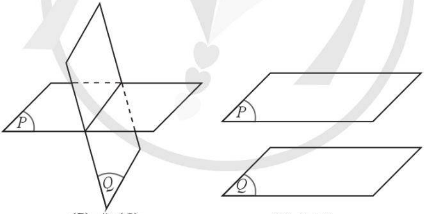
§4 HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Đối với hai mặt phẳng phân biệt trong không gian, có hai khả năng xảy ra:

- Hai mặt phẳng được gọi là *cắt nhau* nếu chúng có điểm chung (*Hình 26a*).
- Hai mặt phẳng được gọi là *song song* với nhau nếu chúng không có điểm chung (*Hình 26b*).



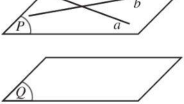
(P) cắt (Q)
a)

$(P) // (Q)$
b)

Hình 26

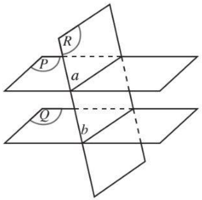
2. Điều kiện và tính chất

- **Định lí 1 (dấu hiệu nhận biết hai mặt phẳng song song):** Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q) (*Hình 27*).



Hình 27

- **Định lí 2 (tính chất về hai mặt phẳng song song):** Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.
- **Hệ quả 1 của Định lí 2:** Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì có duy nhất một mặt phẳng (P) chứa a và song song với (Q).
- **Hệ quả 2 của Định lí 2:** Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
- **Định lí 3:** Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Nếu mặt phẳng (R) cắt mặt phẳng (P) thì cũng cắt mặt phẳng (Q) và hai giao tuyến của chúng song song với nhau (*Hình 28*).

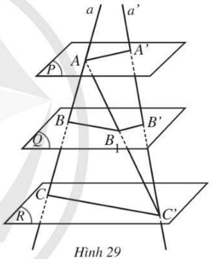


Hình 28

3. Định lí Thalès

Nếu a, a' là hai đường thẳng phân biệt cắt ba mặt phẳng song song (P), (Q), (R) lần lượt tại các điểm A, B, C và A', B', C' thì

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} \text{ (Hình 29)}.$$



Hình 29

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Chứng minh hai mặt phẳng song song

Ví dụ 1 Cho tứ diện $ABCD$. Lấy G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ADB. Chứng minh rằng $(G_1G_2G_3) // (BCD)$.

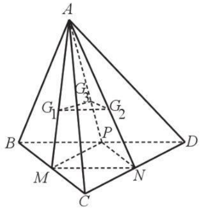
Giải. (*Hình 30*)

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, BD.

Vì $M \in AG_1$ và $\frac{AG_1}{AM} = \frac{2}{3}$; $N \in AG_2$ và $\frac{AG_2}{AN} = \frac{2}{3}$

nên $\frac{AG_1}{AM} = \frac{AG_2}{AN}$, suy ra $G_1G_2 // MN$.

Mà $MN \subset (BCD)$ nên $G_1G_2 // (BCD)$.



Hình 30

Chứng minh tương tự ta cũng có $G_2G_3 // (BCD)$.

Mà G_1G_2, G_2G_3 cắt nhau trong mặt phẳng $(G_1G_2G_3)$. Vậy $(G_1G_2G_3) // (BCD)$.

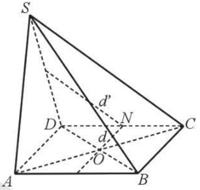
Vấn đề 2. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

Ví dụ 2 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và O là giao điểm của hai đường chéo. Mặt phẳng (P) đi qua điểm O và song song với mặt phẳng (SBC). Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt phẳng $(ABCD)$ và (SCD).

Giải. (*Hình 31*)

Do $(P) // (SBC)$, $(ABCD) \cap (SBC) = BC$, O là điểm chung của hai mặt phẳng (P) và $(ABCD)$ nên giao tuyến d của (P) và $(ABCD)$ là đường thẳng đi qua O và song song với BC.

Gọi N là giao điểm của d và CD. Do $(SCD) \cap (SBC) = SC$, $(P) // (SBC)$, N là điểm chung của hai mặt phẳng (P) và (SCD) nên giao tuyến d' của (P) và (SCD) là đường thẳng đi qua N và song song với SC.



Hình 31

Vấn đề 3. Ứng dụng định lí Thalès

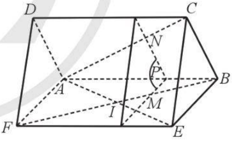
Ví dụ 3 Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Chứng minh rằng $(AFD) // (BEC)$.

b) Gọi M là trọng tâm của tam giác ABE. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (AFD). Mặt phẳng (P) cắt đường thẳng AC tại N. Tính $\dfrac{AN}{NC}$.

Giải. (*Hình 32*)

a) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AD // BC$. Mà AD không thuộc mặt phẳng (BEC), suy ra $AD // (BEC)$. Tương tự, do $ABEF$ là hình bình hành nên $AF // BE$, suy ra $AF // (BEC)$. Mà AD, AF cắt nhau nên $(AFD) // (BEC)$.



Hình 32

b) Gọi I là giao điểm của AE và BF.

Ta có I là trung điểm đoạn AE và M là trọng tâm của tam giác ABE nên $M \in BI$ và $BM = \dfrac{2}{3}BI = \dfrac{1}{3}BF$, hay $FM = 2MB$.

Vì $(AFD) // (BEC)$, $(AFD) // (P)$ nên $(P) // (BEC)$.

Ta có đường thẳng FB cắt ba mặt phẳng song song (ADF), (P), (BCE) lần lượt tại F, M, B; đường thẳng AC cũng cắt ba mặt phẳng trên theo thứ tự tại A, N, C.

Áp dụng định lí Thalès trong không gian, ta có: $\dfrac{AN}{FM} = \dfrac{NC}{MB} \Rightarrow \dfrac{AN}{NC} = \dfrac{FM}{MB} = 2$.

Vậy $\dfrac{AN}{NC} = 2$.

C. BÀI TẬP

28. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và song song với (P)?

A. 0. **B.** 1 **C.** 2. **D.** Vô số.

29. Cho mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Mọi đường thẳng nằm trong (P) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong (Q).

B. (P) song song với mọi đường thẳng nằm trong (Q).

C. Nếu mặt phẳng (R) song song với mặt phẳng (P) thì mặt phẳng (R) song song với mặt phẳng (Q).

D. Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng a song song với mặt phẳng (P).

30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, SA. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $(SBN) // (DAP)$. **B.** $(SBC) // (MPD)$.

C. $(SBN) // (PMD)$. **D.** $(SDN) // (MAP)$.

31. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $(ADF) // (BCE)$. **B.** $AD // (BEF)$.

C. $(ABC) // (DEF)$. **D.** $EC // (ABD)$.

32. Cho a, b là hai đường thẳng phân biệt cắt ba mặt phẳng song song (P), (Q), (R) lần lượt tại các điểm A, B, C và A', B', C'. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'}$. **B.** $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA}$.

C. $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$. **D.** $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$.

33. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC. Qua A, B, C lần lượt vẽ các tia Ax, By, Cz đôi một song song với nhau và không nằm trong mặt phẳng (P). Trên các tia Ax, By, Cz lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho $AA' = BB' = CC'$. Chứng minh rằng $(ABC) // (A'B'C')$.

34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD. Gọi M là trọng tâm của tam giác SAD, N là điểm thuộc đoạn thẳng AC sao cho $AN = \frac{1}{3}AC$, P là điểm thuộc đoạn thẳng CD sao cho $DP = \frac{1}{3}DC$. Chứng minh rằng $(MNP) // (SBC)$.

35*. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên các đường chéo AC, BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF}$. Qua M vẽ đường thẳng song song với AB cắt AD tại M', qua N vẽ đường thẳng song song với AB cắt AF tại N'.

a) Chứng minh rằng $(MNN') // (CDE)$.

b) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (AFD). Mặt phẳng (P) cắt đường thẳng EF tại I. Tính $\frac{FI}{FE}$, biết $\frac{AM}{AC} = \frac{1}{3}$.

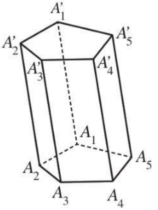
§5 HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hình lăng trụ

Hình gồm hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $A_1'A_2'...A_n'$ và các hình bình hành $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$, ..., $A_nA_1A_1'A_n'$ được gọi là *hình lăng trụ*, kí hiệu là $A_1A_2...A_n.A_1'A_2'...A_n'$.

Ví dụ: *Hình 33* biểu diễn hình lăng trụ ngũ giác $A_1A_2A_3A_4A_5.A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'$.



Hình 33

Trong hình lăng trụ $A_1A_2...A_n.A_1'A_2'...A_n'$, ta gọi:

– Hai đa giác $A_1A_2...A_n$ và $A_1'A_2'...A_n'$ là hai *mặt đáy* của hình lăng trụ;

– Các hình bình hành $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$, ..., $A_nA_1A_1'A_n'$ là các *mặt bên* của hình lăng trụ;

– Các cạnh của hai mặt đáy là các *cạnh đáy* của hình lăng trụ;

– Các đoạn thẳng A_1A_2', A_2A_2', ..., A_nA_n' là các *cạnh bên* của hình lăng trụ;

– Các đỉnh của hai mặt đáy là các *đỉnh* của hình lăng trụ.

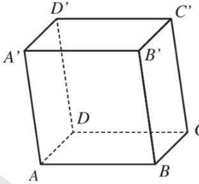
Nhận xét

– Các cạnh bên của hình lăng trụ song song và bằng nhau;
– Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành;
– Hai mặt đáy của hình lăng trụ là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau.

2. Hình hộp

Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

Ví dụ: *Hình 34* biểu diễn hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.



Hình 34

Trong mỗi hình hộp, ta gọi:

– Hai mặt không có đỉnh chung là *hai mặt đối diện*;
– Hai cạnh song song không nằm trong một mặt là *hai cạnh đối diện*;
– Hai đỉnh không thuộc cùng một mặt là *hai đỉnh đối diện*;
– Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện là *đường chéo*.

Nhận xét: Hình hộp là một hình lăng trụ nên hình hộp có các tính chất của hình lăng trụ, ngoài ra:

– Các mặt của hình hộp là các hình bình hành;
– Hai mặt phẳng lần lượt chứa hai mặt đối diện của hình hộp song song với nhau.

B. VÍ DỤ

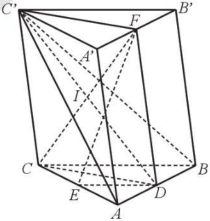
Vấn đề 1. Sử dụng định nghĩa và các tính chất của hình lăng trụ

Ví dụ 1 Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và $A'B'$.

a) Chứng minh rằng EF // $(BCC'B')$.

b) Gọi I là giao điểm của đường thẳng CF với mặt phẳng $(AC'B)$. Chứng minh rằng I là trung điểm của đoạn thẳng CF.

Giải. (*Hình 35*)



Hình 35

a) Lấy D là trung điểm của AB.

Tứ giác $ABB'A'$ là hình bình hành nên DF // BB', mà $BB' \subset (BB'C'C)$, suy ra DF // $(BB'C'C)$.

Do DE là đường trung bình của tam giác ABC nên DE // BC, mà $BC \subset (BB'C'C)$, suy ra DE // $(BB'C'C)$.

Từ đó ta có (DEF) // $(BB'C'C)$. Vì EF nằm trong (DEF) nên EF // $(BB'C'C)$.

b) Vì $CC' \parallel DF$ (cùng song song với BB') nên CC' và DF nằm trong cùng một mặt phẳng. Ta có $C'D$ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(AC'B)$ và $(CC'FD)$ mà I nằm trên cả hai mặt phẳng đó nên I thuộc $C'D$.

Bên cạnh đó, $CC' = DF = BB'$, $CC' \parallel DF$ nên $CC'FD$ là hình bình hành. Mà I là giao điểm của hai đường chéo CF và $C'D$ nên I là trung điểm của CF.

Vấn đề 2. Sử dụng định nghĩa và các tính chất của hình hộp

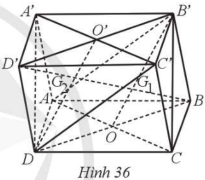
Ví dụ 2 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh rằng $(ACB') \parallel (A'C'D)$.

b) Gọi G_1, G_2 lần lượt là giao điểm của BD' với các mặt phẳng (ACB') và $(A'C'D)$. Chứng minh rằng G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ACB' và $A'C'D$.

c) Chứng minh rằng $BG_1 = G_1G_2 = G_2D'$.

Giải. (*Hình 36*)



Hình 36

a) Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $AA' \parallel CC'$ và $AA' = CC'$, suy ra tứ giác $ACC'A'$ là hình bình hành. Do đó $AC \parallel A'C'$, mà $A'C' \subset (A'C'D)$ nên $AC \parallel (A'C'D)$. Tương tự, tứ giác $A'B'CD$ cũng là hình bình hành nên $B'C \parallel A'D$, mà $A'D \subset (A'C'D)$ suy ra $B'C \parallel (A'C'D)$.

Từ đó ta có $(ACB') \parallel (A'C'D)$.

b) Gọi O và O' lần lượt là giao điểm hai đường chéo của các hình bình hành $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Vì $B'O$ là giao tuyến của (ACB') và $(BDD'B')$ nên G_1 thuộc $B'O$. Tương tự, G_2 thuộc DO'.

Vì $DD' \parallel BB'$ và $DD' = BB'$ nên $BDD'B'$ là hình bình hành, suy ra $BD \parallel B'D'$ và $BD = B'D'$. Do đó, ta có $\dfrac{G_1O}{G_1B'} = \dfrac{OB}{B'D'} = \dfrac{OB}{BD} = \dfrac{1}{2}$.

Xét tam giác $AB'C$ có $B'O$ là trung tuyến và $\dfrac{G_1O}{G_1B'} = \dfrac{1}{2}$ nên G_1 là trọng tâm của tam giác $AB'C$. Chứng minh tương tự, ta cũng có G_2 là trọng tâm của tam giác $A'C'D$.

c) Trong mặt phẳng $(BDD'B')$, vì $BD \parallel B'D'$ nên $\dfrac{BG_1}{G_1D'} = \dfrac{OB}{B'D'} = \dfrac{1}{2}$ hay $\dfrac{BG_1}{BD'} = \dfrac{1}{3}$.

Tương tự, ta cũng có $\dfrac{D'G_2}{BD'} = \dfrac{1}{3}$. Từ đó suy ra $BG_1 = G_1G_2 = G_2D'$.

Vấn đề 3. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

Ví dụ 3 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$; mặt phẳng (P) đi qua I và song song với BD', $B'C$.

a) Xác định giao tuyến d của hai mặt phẳng (P) và $(BCC'B')$.

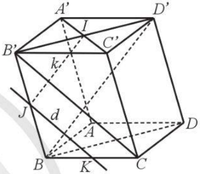
b) Gọi K là giao điểm của đường thẳng d và BC. Tính $\frac{BK}{BC}$.

Giải. (*Hình 37*)

a) Mặt phẳng (P) đi qua I và song song với BD', mà $BD' \subset (BDD'B')$ nên (P) cắt mặt phẳng $(BDD'B')$ theo giao tuyến k đi qua I và song song với BD'. Gọi J là giao điểm của đường thẳng k với BB'.

Mặt phẳng (P) đi qua J và song song với $B'C$, mà $B'C \subset (BCC'B')$ nên (P) cắt mặt phẳng $(BCC'B')$ theo giao tuyến d đi qua J và song song với $B'C$.

b) Do $A'B'C'D'$ là hình bình hành nên I là trung điểm của $B'D'$. Trong tam giác $B'BD'$ có IJ song song với $D'B$ nên J là trung điểm của BB'. Trong tam giác $B'BC$ có JK song song với $B'C$ nên K là trung điểm của BC. Vậy $\frac{BK}{BC} = \frac{1}{2}$.



Hình 37

C. BÀI TẬP

36. Số đường chéo trong một hình hộp là:

A. 4. **B.** 24 **C.** 28 **D.** 2.

37. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, $B'C'$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $(A'MN) // (ACC')$. **B.** $(A'BN) // (AC'M)$.

C. $C'M // (A'B'B)$. **D.** $BN // (ACC'A')$.

38. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Các mặt của hình hộp là các hình bình hành.

B. Hai mặt phẳng lần lượt chứa hai mặt đối diện của hình hộp song song với nhau.

C. Các đoạn thẳng AC', $A'C$, BD', $B'D$ bằng nhau.

D. Các đường thẳng AC', $A'C$, BD', $B'D$ đồng quy.

39. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B'$, $B'C'$. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (BMN) và $(ACC'A')$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $d \parallel AA'$. **B.** $d \parallel BC$. **C.** $d \parallel A'B'$. **D.** $d \parallel A'C'$.

40. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(BA'C')$ song song với mặt phẳng nào dưới đây?

A. (ACD). **B.** (ADD'). **C.** (DCD'). **D.** $(AD'C)$.

41. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của $A'C'$.

a) Chứng minh rằng $A'B \parallel (B'CM)$.

b) Xác định giao tuyến d của hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC')$.

42. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CC', $C'D'$, $D'A'$, AA'. Chứng minh rằng:

a) Sáu điểm M, N, P, Q, R, S cùng thuộc một mặt phẳng.

b) Các đoạn thẳng MQ, NR, PS cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn.

43*. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G, I, K lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, $A'B'C'$, $A'B'B$.

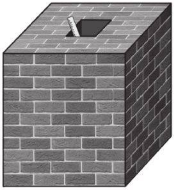
a) Chứng minh rằng $IK \parallel (BCC'B')$.

b) Chứng minh rằng $(AGK) \parallel (A'IC)$.

c) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm K và song song với mặt phẳng (ABC). Mặt phẳng (α) cắt $A'C$ tại điểm L. Tính $\dfrac{LA'}{LC}$.

44*. Chứng minh rằng trong một hình hộp, tổng bình phương của bốn đường chéo bằng tổng bình phương của tất cả các cạnh.

45. Phần trong của một bể đựng nước được xây có dạng hình hộp như *Hình 38*. Để xác định tỉ số của độ cao mực nước trong bể với chiều cao của lòng bể, bạn Minh làm như sau: "Lấy một thanh thước thẳng đủ dài cắm vào bể sao cho một đầu chạm đáy bể và để thước tựa vào mép dưới của thành miệng bể, đánh dấu điểm tựa. Sau đó rút thước lên, tính tỉ số độ dài của phần thước chìm trong nước và độ dài của phần thước từ điểm được đánh dấu đến điểm đầu chạm đáy bể. Tỉ số đó chính bằng tỉ số của độ cao mực nước trong bể với chiều cao của lòng bể". Bạn Minh làm có đúng không? Vì sao?



Hình 38

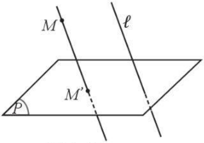
§6 PHÉP CHIẾU SONG SONG. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phép chiếu song song

a) Định nghĩa

- Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng ℓ cắt mặt phẳng (P). Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' của mặt phẳng (P) sao cho MM' song song hoặc trùng với ℓ gọi là *phép chiếu song song* lên mặt phẳng (P) theo phương của đường thẳng ℓ hoặc nói gọn là theo phương ℓ (*Hình 39*).



Hình 39

Mặt phẳng (P) gọi là *mặt phẳng chiếu*, phương ℓ gọi là *phương chiếu*, điểm M' gọi là hình chiếu song song (hoặc *ảnh*) của điểm M qua phép chiếu song song nói trên.

- Cho hình $\mathscr{H}$. Tập hợp $\mathscr{H}'$ gồm hình chiếu song song của tất cả các điểm thuộc $\mathscr{H}$ gọi là hình chiếu song song (hoặc ảnh) của hình $\mathscr{H}$ qua phép chiếu song song nói trên.

b) Tính chất

- Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.
- Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng; biến tia thành tia; biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
- Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

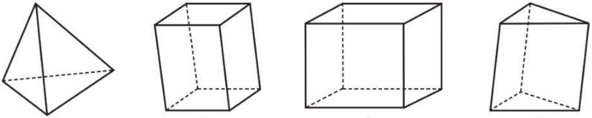
2. Hình biểu diễn của một hình không gian

- Hình biểu diễn của một hình $\mathscr{H}$ trong không gian là hình chiếu song song của hình $\mathscr{H}$ trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

***Chú ý*:** Muốn vẽ đúng hình biểu diễn của một hình không gian, ta phải áp dụng các tính chất của phép chiếu song song.

- Hình biểu diễn của một số hình khối đơn giản:

Các hình sau đây thường được sử dụng làm hình biểu diễn của: hình tứ diện (*Hình 40a*); hình hộp (*Hình 40b*); hình hộp chữ nhật (*Hình 40c*); hình lăng trụ tam giác (*Hình 40d*).



a) *b)* *c)* *d)*

Hình 40

- Hình biểu diễn của một số hình phẳng:

– Một tam giác bất kì có thể coi là hình biểu diễn của một tam giác có dạng tuỳ ý.

– Một hình bình hành bất kì có thể coi là hình biểu diễn của một hình bình hành có dạng tuỳ ý (có thể là hình bình hành, hình vuông, hình thoi, hình chữ nhật, ...).

– Một hình thang bất kì có thể coi là hình biểu diễn của một hình thang tuỳ ý, sao cho tỉ số độ dài hai đáy của hình biểu diễn phải bằng tỉ số độ dài hai đáy của hình thang ban đầu.

– Ta thường dùng đường elip làm hình biểu diễn của đường tròn, tâm của elip biểu diễn cho tâm của đường tròn.

Chú ý: Phép chiếu song song nói chung không giữ nguyên tỉ số của hai đoạn thẳng không nằm trên hai đường thẳng song song (hay không cùng nằm trên một đường thẳng) và không giữ nguyên độ lớn của một góc.

B. VÍ DỤ

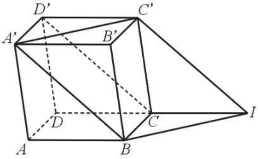
Vấn đề 1. Xác định ảnh của một hình qua phép chiếu song song cho trước

Ví dụ 1 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định ảnh của tam giác $A'C'D'$ qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $A'B$.

Giải. (*Hình 41*)

Gọi f là phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $A'B$. Khi đó, f biến điểm A' thành điểm B, biến điểm D' thành điểm C và biến điểm C' thành điểm I với I là điểm sao cho C là trung điểm của DI.

Vì vậy, ảnh của tam giác $A'C'D'$ qua phép chiếu song song f là tam giác BIC.



Hình 41

Vấn đề 2. Vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian

Ví dụ 2 Vẽ hình biểu diễn của:

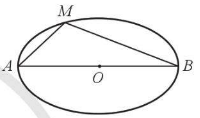
a) Một tam giác vuông nội tiếp trong một đường tròn;

b) Một lục giác đều.

Giải

a) Với tam giác vuông nội tiếp trong đường tròn ta nhận thấy: tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn (cạnh đi qua tâm O của đường tròn) và đỉnh đối diện với cạnh đó thuộc đường tròn. Từ đó suy ra cách vẽ hình biểu diễn của một tam giác vuông nội tiếp trong đường tròn như sau:

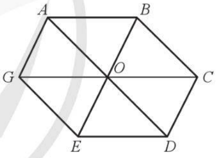
Vẽ hình elip biểu diễn cho đường tròn. Sau đó vẽ đoạn thẳng AB đi qua tâm O của elip với A, B nằm trên đường elip. Lấy điểm M trên đường elip khác A và B rồi nối M với A, M với B. Như vậy, ta được hình biểu diễn của tam giác vuông AMB nội tiếp trong đường tròn tâm O (*Hình 42*).



Hình 42

b) Với lục giác đều $ABCDEG$ ta nhận thấy: tứ giác $OABC$ là hình thoi và các đường chéo AD, BE, CG cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường. Từ đó suy ra cách vẽ hình biểu diễn của lục giác đều $ABCDEG$ như sau:

Vẽ hình bình hành $OABC$. Sau đó vẽ các điểm D, E, G sao cho O là trung điểm của AD, BE, CG rồi nối A với G, G với E, E với D, D với C. Như vậy, ta được hình biểu diễn của lục giác đều $ABCDEG$ (*Hình 43*).



Hình 43

C. BÀI TẬP

46. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Hình chiếu song song của điểm B' trên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương chiếu $A'D$ là:

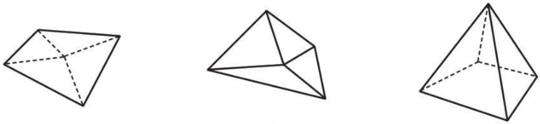
A. Điểm D. **B.** Điểm C. **C.** Điểm B. **D.** Điểm A.

b) Hình chiếu song song của đoạn thẳng $A'B$ trên mặt phẳng $(CDD'C')$ theo phương chiếu BC là:

A. Đoạn thẳng $D'C$. **B.** Đoạn thẳng $A'D'$.

C. Đoạn thẳng AB'. **D.** Đoạn thẳng $A'B$.

47. Trong các *Hình 44a, b, c*, có bao nhiêu hình có thể là hình biểu diễn cho hình chóp tứ giác?



a) *b)* *c)*

Hình 44

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

48. Hình biểu diễn của hai đường thẳng cắt nhau có thể là hai đường thẳng song song được không? Vì sao?

49. Hình biểu diễn của hai đường thẳng chéo nhau có thể là hai đường thẳng song song được không? Vì sao?

50. Vẽ hình biểu diễn của hình lăng trụ có đáy là tam giác đều.

51*. Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD. Xác định ảnh của tứ diện $ABCD$ qua phép chiếu song song có phương chiếu là đường thẳng MN, mặt phẳng chiếu là mặt phẳng (Q) bất kì cắt đường thẳng MN.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

52. Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng thuộc một mặt phẳng. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Bốn điểm A, B, C, D đã cho đôi một khác nhau.

B. Không có ba điểm nào trong bốn điểm A, B, C, D là thẳng hàng.

C. Hai đường thẳng AC và BD song song với nhau.

D. Hai đường thẳng AC và BD không có điểm chung.

53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $MA = 2MS$. Mặt phẳng (CDM) cắt SB tại N. Tỉ số $\dfrac{SN}{SB}$ bằng:

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

54. Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $MB = 2MC$. Mặt phẳng (P) đi qua M và song song với mặt phẳng (ABD) cắt cạnh AC tại N. Tỉ số $\frac{AN}{NC}$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

55. Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh CD lấy hai điểm M và N khác nhau. Chứng minh rằng các đường thẳng AM và BN không cắt nhau.

56. Cho mặt phẳng (P), ba điểm A, B, C không thẳng hàng và không nằm trên (P). Chứng minh rằng nếu ba đường thẳng AB, BC, CA cắt mặt phẳng (P) lần lượt tại các điểm M, N, P thì M, N, P thẳng hàng.

57. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh SD.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

b) Xác định giao điểm của đường thẳng BM với mặt phẳng (SAC).

c) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MBC) với các mặt phẳng (SAB) và (SAD).

58. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD; P, Q lần lượt thuộc các cạnh CD, BC (P, Q không là trung điểm của CD, CB). Chứng minh rằng nếu M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng thì ba đường thẳng MQ, NP và AC cùng đi qua một điểm.

59. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD; P, Q lần lượt thuộc các cạnh CD, BC (P, Q không trùng các đỉnh B, C, D). Chứng minh rằng nếu M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng thì PQ song song với BD.

60. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, $B'C'$. Chứng minh rằng $AM \parallel (A'NC)$.

61. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD.

a) Chứng minh rằng $SC \parallel (MNP)$.

b) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với mặt phẳng (SCD) và giao điểm Q của đường thẳng SD với mặt phẳng (MNP).

c) Xác định giao điểm E của đường thẳng SA với mặt phẳng (MNP).

d) Tính tỉ số $\frac{SE}{SA}$.

62. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AD, $B'C'$, DD'.

a) Chứng minh rằng $ADC'B'$ là hình bình hành.

b) Chứng minh rằng $BD \parallel (AB'D')$, $MN \parallel (AB'D')$.

c) Chứng minh rằng $(MNP) \parallel (AB'D')$ và $BD \parallel (MNP)$.

d*) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt của hình hộp.

e*) Lấy một đường thẳng cắt ba mặt phẳng $(AB'D')$, (MNP), $(C'BD)$ lần lượt tại I, J, H. Tính tỉ số $\dfrac{IJ}{JH}$.

63. Vẽ hình biểu diễn của một số đồ vật có dạng hình chóp, hình lăng trụ, … trong lớp học.

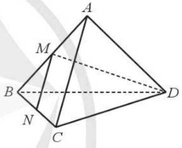
LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

§1 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

1. B. **2.** D.

3. Học sinh tự làm.

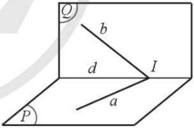
4. (*Hình 45*)



Hình 45

Giả sử bốn điểm M, N, C, D cùng thuộc một mặt phẳng. Khi đó, $M \in (NCD)$ nên $M \in (BCD)$. Như vậy, $BM \subset (BCD)$ nên $A \in (BCD)$. Mâu thuẫn với giả thiết $ABCD$ là tứ diện. Vậy bốn điểm M, N, C, D không cùng nằm trong một mặt phẳng.

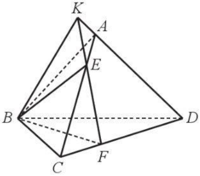
5. (*Hình 46*)



Hình 46

Gọi I là giao điểm của a và b. Khi đó, I vừa thuộc (P) vừa thuộc (Q). Suy ra I thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q). Vậy I thuộc d.

6. (*Hình 47*)



Hình 47

a) Vì $E \in (BEF)$, $E \in (ABC)$ và $B \in (BEF)$, $B \in (ABC)$ nên $BE = (BEF) \cap (ABC)$.

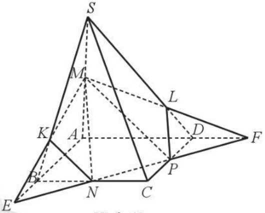
Tương tự ta có $EF = (BEF) \cap (ACD)$ và $BF = (BEF) \cap (BCD)$.

b) Trong mặt phẳng (ACD), lấy K là giao điểm của AD và EF. Khi đó, $K \in (BEF)$. Suy ra K là giao điểm của AD và (BEF).

c) Hai mặt phẳng (BEF) và (ABD) có hai điểm chung là B và K. Vậy giao tuyến của mặt phẳng (BEF) và mặt phẳng (ABD) là đường thẳng BK.

7. (*Hình 48*)

a) Giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với mặt phẳng ($ABCD$) là đường thẳng NP. Trong mặt phẳng ($ABCD$), gọi E là giao điểm của NP và AB. Ta có E thuộc AB nên E nằm trên (SAB). Vậy E là giao điểm của đường thẳng NP với mặt phẳng (SAB).



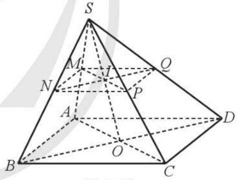
Hình 48

b) Giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với mặt phẳng (SAB) là đường thẳng ME. Trong mặt phẳng ($ABCD$), gọi F là giao điểm của NP và AD. Khi đó, giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với mặt phẳng (SAD) là đường thẳng MF.

Trong mặt phẳng (SAB), gọi K là giao điểm của ME và SB; trong mặt phẳng (SAD), gọi L là giao điểm của MF và SD. Khi đó, giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt phẳng (SBC), (SCD) lần lượt là các đường thẳng NK và PL.

8. (*Hình 49*)

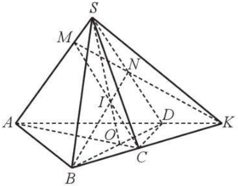
a) Trong mặt phẳng ($ABCD$), gọi O là giao điểm của AC và BD. Trong mặt phẳng (SAC), gọi I là giao điểm của MP và SO. Vì $I \in SO$ nên $I \in (SBD)$. Vậy I là giao điểm của MP với mặt phẳng (SBD).



Hình 49

b) Trong mặt phẳng (SBD), gọi Q là giao điểm của NI và SD. Vì $Q \in NI$ nên $Q \in (MNP)$. Vậy Q là giao điểm của SD với mặt phẳng (MNP).

9. (*Hình 50*)



Hình 50

a) Trong mặt phẳng (SAC), gọi M là giao điểm của CI và SA. Vì $M \in CI$ nên $M \in (IBC)$. Vậy M là giao điểm của SA với mặt phẳng (IBC). Tương tự, trong mặt phẳng (SBD), gọi N là giao điểm của BI với SD, khi đó, N là giao điểm của SD với mặt phẳng (IBC).

b*) Do $ABCD$ không là hình thang nên AD cắt BC tại K. Ta có $K \in BC \subset (IBC)$, $K \in AD \subset (SAD)$ nên K là một điểm chung của (IBC) và (SAD).

Mà $MN = (IBC) \cap (SAD)$ nên $K \in MN$. Vậy các đường thẳng AD, BC và MN cùng đi qua điểm K.

§2 HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

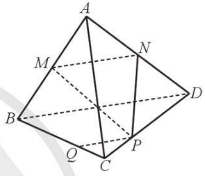
10. C. **11. C.** **12. D.** **13. A.** **14. B.**

15. a và b song song; a và c chéo nhau; b và c cắt nhau.

16. (*Hình 51*)

Vì BC cắt mặt phẳng (MNP) tại Q nên PQ là giao tuyến của (MNP) và (BCD).

Ba mặt phẳng (ABD), (BCD), (MNP) đôi một cắt nhau theo các giao tuyến BD, PQ, MN. Mà trong tam giác ABD, vì MN là đường trung bình nên $MN \parallel BD$. Vậy theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng, ta có $PQ \parallel BD$.



Hình 51

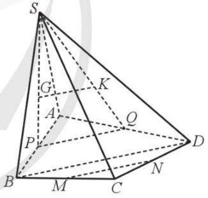
17. (*Hình 52*)

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và AD.

Khi đó, ta có $\dfrac{SG}{SP} = \dfrac{SK}{SQ} = \dfrac{2}{3}$, suy ra $GK \parallel PQ$.

Vì PQ là đường trung bình của tam giác ABD nên $PQ \parallel BD$; MN là đường trung bình của tam giác BCD nên $MN \parallel BD$. Suy ra $MN \parallel PQ$.

Từ đó, suy ra $GK \parallel MN$.

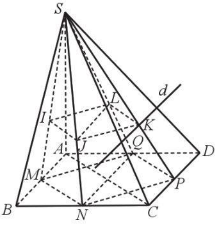


Hình 52

18. (*Hình 53*)

a) Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Do MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $MN \parallel AC$ và $MN = \dfrac{1}{2}AC$.

Tương tự ta có $QP \parallel AC$ và $QP = \dfrac{1}{2}AC$. Suy ra $MN \parallel QP$ và $MN = QP$.



Hình 53

Ngoài ra, ta có $\frac{SI}{SM}=\frac{SJ}{SN}=\frac{IJ}{MN}=\frac{2}{3}$. Suy ra $IJ // MN$ và $IJ=\frac{2}{3}MN$. Tương tự ta có $LK // QP$ và $LK=\frac{2}{3}QP$. Từ các kết quả trên, suy ra $IJ // LK$ và $IJ = LK$.

Vậy bốn điểm I, J, K, L đồng phẳng và tứ giác $IJKL$ là hình bình hành.

b) Vì $\frac{SJ}{SN}=\frac{SL}{SQ}=\frac{2}{3}$ nên $JL // NQ$. Trong hình bình hành $(ABCD)$ có $NQ // CD$.

Suy ra $JL // CD$.

c) Hai mặt phẳng $(IJKL)$ và (SCD) có điểm chung là K và lần lượt chứa hai đường thẳng JL và CD song song với nhau nên giao tuyến của hai mặt phẳng $(IJKL)$ và (SCD) là đường thẳng d đi qua K và song song với CD.

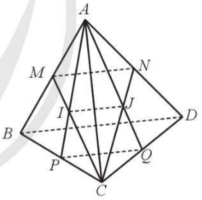
§3 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

19. C. **20. D.** **21. B.** **22. C.**

23. (*Hình 54*)

Vì MN là đường trung bình của tam giác ABD nên $MN // BD$, mà $MN \subset (CMN)$ nên $BD // (CMN)$. Vì PQ là đường trung bình của tam giác BCD nên $PQ // BD$, mà $PQ \subset (APQ)$ nên $BD // (APQ)$.

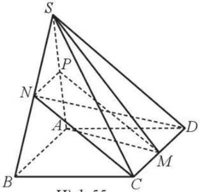
Trong mặt phẳng (ABC), gọi I là giao điểm của AP và MC; trong mặt phẳng (ACD), gọi J là giao điểm của AQ và NC. Khi đó, IJ là giao tuyến của hai mặt phẳng (APQ) và (CMN). Mà $BD // (CMN)$ và $BD // (APQ)$ nên $IJ // BD$.



Hình 54

24. (*Hình 55*)

a) Trong mặt phẳng (SAB), lấy P thuộc SA sao cho $NP // AB$. Vì $AB // CD$ nên $NP // CD$. Hai mặt phẳng (SAB) và (CDN) có điểm chung là N và lần lượt chứa hai đường thẳng AB, CD song song với nhau nên giao tuyến của hai mặt phẳng đó là đường thẳng NP.



Hình 55

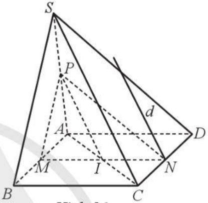
b) Vì $NB = NS$ và $NP \parallel AB$ nên $NP = \frac{1}{2}AB$.

Do M là trung điểm của CD nên $CM \parallel AB$ và $CM = \frac{1}{2}AB$. Suy ra $CM \parallel NP$ và $CM = NP$. Do đó, tứ giác $CNPM$ là hình bình hành, suy ra $CN \parallel MP$. Mà $MP \subset (SAM)$ nên $CN \parallel (SAM)$.

25. (*Hình 56*)

a) Gọi I là giao điểm của AC với MN. Ta có I là trung điểm của AC nên PI là đường trung bình của tam giác SAC, suy ra $PI \parallel SC$, mà $PI \subset (MNP)$ nên $SC \parallel (MNP)$.

b) Hai mặt phẳng (MNP) và (SCD) có điểm chung là N và lần lượt chứa hai đường thẳng PI, SC song song với nhau nên giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SCD) là đường thẳng d đi qua N và song song với SC.

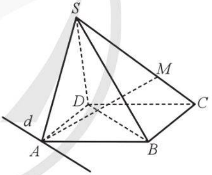


Hình 56

26*. (*Hình 57*)

Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng AM và song song với BD nên (P) cắt $(ABCD)$ theo giao tuyến d đi qua A và song song với BD. Vì hình bình hành $ABCD$ cố định nên đường thẳng d cố định trong $(ABCD)$.

Vậy khi M chuyển động trên cạnh SC thì mặt phẳng (P) luôn luôn đi qua đường thẳng d cố định.



Hình 57

27. Phát biểu của bạn Minh là đúng. Vì cánh cửa là hình chữ nhật và có thể kéo trượt bình thường nên đường ray trên và đường ray dưới của cánh cửa song song với nhau. Đường ray dưới có thể xem là đường thẳng thuộc mặt đáy của tủ. Vì vậy đường ray trượt ở mép trên cánh cửa song song với mặt đáy của tủ quần áo.

§4 HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

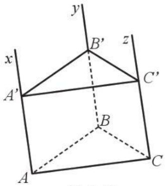
28. B. **29. B.** **30. C.** **31. A.** **32. D.**

33. (*Hình 58*)

Vì $AA' \,//\, BB'$ và $AA' = BB'$ nên $AA'B'B$ là hình bình hành, suy ra $A'B' \,//\, AB$. Mà $AB \subset (ABC)$ nên $A'B' \,//\, (ABC)$.

Tương tự ta có $B'C' \,//\, (ABC)$.

Từ đó, suy ra $(ABC) \,//\, (A'B'C')$.



Hình 58

34. (*Hình 59*)

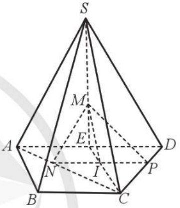
Gọi E là trung điểm của AD và I là giao điểm của NP và EC.

Ta có $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{DP}{CP} = \dfrac{1}{3}$ nên $NP \,//\, AD$. Do $AD \,//\, BC$ nên $NP \,//\, BC$, suy ra $NP \,//\, (SBC)$.

Vì $NP \,//\, AD$ nên ta có $\dfrac{EI}{EC} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{1}{3}$.

Do M là trọng tâm của tam giác SAD và E trung điểm của đoạn AD nên $M \in SE$ và $\dfrac{EM}{ES} = \dfrac{1}{3}$.

Như vậy $\dfrac{EI}{EC} = \dfrac{EM}{ES}$ nên $MI \,//\, SC$, suy ra $MI \,//\, (SBC)$. Từ đó, ta có $(MNP) \,//\, (SBC)$.



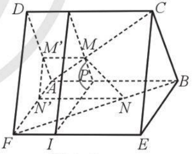
Hình 59

35*. (*Hình 60*)

a) Ta có $MM' \,//\, AB$, $NN' \,//\, AB$ nên $MM' \,//\, NN'$. Suy ra M, M', N', N cùng thuộc một mặt phẳng.

Ta có $CD \,//\, AB$ và $EF \,//\, AB$ nên C, D, F, E cùng thuộc một mặt phẳng.

Do $AB \,//\, CD$ nên $MM' \,//\, CD$, suy ra $MM' \,//\, (CDE)$.



Hình 60

Vì $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AM'}{AD}$ và $\dfrac{BN}{BF} = \dfrac{AN'}{AF}$ nên $\dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AN'}{AF}$, suy ra $M'N' \,//\, DF$, mà $DF \subset (CDE)$ nên $M'N' \,//\, (CDE)$. Từ đó, suy ra $(MM'N') \,//\, (CDE)$, do đó $(MNN') \,//\, (CDE)$.

b) Ta có đường thẳng AC cắt ba mặt phẳng song song (ADF), (P), (BCE) lần lượt tại A, M, C; đường thẳng FE cũng cắt ba mặt phẳng trên theo thứ tự tại F, I, E.

Áp dụng định lí Thalès trong không gian, ta có: $\dfrac{AM}{FI} = \dfrac{MC}{IE} = \dfrac{CA}{EF} \Rightarrow \dfrac{FI}{EF} = \dfrac{AM}{CA}$.

Mà $\dfrac{AM}{CA} = \dfrac{1}{3}$ nên $\dfrac{FI}{FE} = \dfrac{1}{3}$.

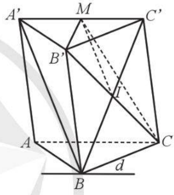
§5 HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP

36. A. **37. B.** **38. C.** **39. D.** **40. D.**

41. (*Hình 61*)

a) Gọi I là giao điểm của BC' và $B'C$. Do tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành nên I là trung điểm của BC'. Do đó MI là đường trung bình của tam giác $A'C'B$, suy ra $MI \parallel A'B$. Mặt khác, $MI \subset (B'CM)$ nên $A'B \parallel (B'CM)$.

b) Hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC')$ có điểm chung là B và lần lượt chứa hai đường thẳng song song là AC, $A'C'$ nên giao tuyến của chúng là đường thẳng d đi qua B và song song với AC.



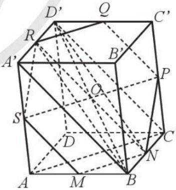
Hình 61

42. (*Hình 62*)

a) Ta có tứ giác $ASPC$ là hình bình hành nên $AC \parallel SP$. Mặt khác $MN \parallel AC$ nên $MN \parallel SP$. Vậy M, N, P, S cùng thuộc một mặt phẳng.

Lại có $PQ \parallel CD'$, $CD' \parallel BA'$, $BA' \parallel MS$ nên $PQ \parallel MS$. Vậy $Q \in (MNPS)$.

Tương tự ta có $QR \parallel MN$ nên $R \in (MNPS)$. Vậy sáu điểm M, N, P, Q, R, S cùng thuộc một mặt phẳng.



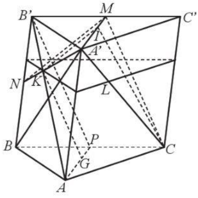
Hình 62

b) Gọi O là giao điểm của các đường chéo hình hộp. Ta có tứ giác $BND'R$ là hình bình hành, nên hai đường chéo BD', NR cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường.

Tương tự, ta chứng minh được QM, PS đều nhận O là trung điểm. Vậy các đoạn thẳng MQ, NR, PS cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn.

43*. (*Hình 63*)

a) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh $B'C'$, BB'. Do I, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác $A'B'C'$, $A'B'B$ nên $\dfrac{A'I}{A'M} = \dfrac{A'K}{A'N} = \dfrac{2}{3}$, suy ra $IK \parallel MN$. Mà $MN \subset (BCC'B')$ nên $IK \parallel (BCC'B')$.



Hình 63

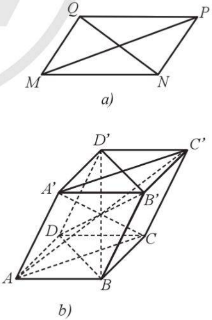
b) Gọi P là trung điểm của cạnh BC. Khi đó, mặt phẳng (AGK) cũng là mặt phẳng $(AB'P)$, mặt phẳng $(A'IC)$ cũng là mặt phẳng $(A'MC)$.

Ta có $B'P \parallel MC$ nên $B'P \parallel (A'IC)$, $AP \parallel A'M$ nên $AP \parallel (A'IC)$. Từ đó, suy ra $(AGK) \parallel (A'IC)$.

c) Với K là trọng tâm của tam giác $A'BB'$, ta nhận được $\dfrac{B'K}{KA} = \dfrac{1}{2}$. Ta có đường thẳng $B'A$ cắt ba mặt phẳng song song $(A'B'C')$, (α), (ABC) lần lượt tại B', K, A; đường thẳng $A'C$ cũng cắt ba mặt phẳng trên theo thứ tự tại A', L, C. Áp dụng định lí Thalès trong không gian, ta có:

$$\frac{B'K}{A'L} = \frac{KA}{LC} = \frac{AB'}{CA'} \Rightarrow \frac{A'L}{LC} = \frac{B'K}{KA} = \frac{1}{2}.\text{ Vậy } \frac{LA'}{LC} = \frac{1}{2}.$$

44*. Trước hết ta chứng minh một kết quả trong hình học phẳng: Trong hình bình hành, tổng bình phương của hai đường chéo bằng tổng bình phương tất cả các cạnh.



Hình 64

Xét hình bình hành $MNPQ$ (*Hình 64a*). Ta có:

$MP^2 = QM^2 + QP^2 - 2QM\,.\,QP\cos\widehat{MQP}$;

$QN^2 = PQ^2 + PN^2 - 2PQ\,.\,PN\cos\widehat{QPN}$.

Do $QM = PN$ và $\cos\widehat{MQP} = -\cos\widehat{QPN}$ nên ta có: $MP^2 + QN^2 = 2(QM^2 + QP^2)$.

Xét hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (*Hình 64b*).

Áp dụng kết quả trên cho hai hình bình hành $AA'C'C$ và $BB'D'D$ ta được:

$AC'^2 + A'C^2 = 2(AA'^2 + A'C'^2);$

$BD'^2 + B'D^2 = 2(BB'^2 + B'D'^2).$

Suy ra $AC'^2 + A'C^2 + BD'^2 + B'D^2$

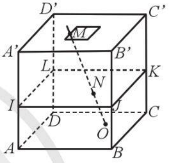
$= 4AA'^2 + 2(A'C'^2 + B'D'^2)$ (Do $AA' = BB'$).

Trong hình bình hành $A'B'C'D'$, ta có: $A'C'^2 + B'D'^2 = 2(A'B'^2 + A'D'^2)$.

Vậy $AC'^2 + A'C^2 + BD'^2 + B'D^2 = 4AA'^2 + 4A'B'^2 + 4A'D'^2$.

45. Bạn Minh làm như vậy là đúng. Giả sử phần trong bể nước và thước được biểu diễn bởi hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và đường thẳng MO. Mặt nước được biểu diễn bởi mặt phẳng $(IJKL)$ (*Hình 65*). Khi đó $(ABCD)$, $(A'B'C'D')$, $(IJKL)$ đôi một song song, áp dụng định lí Thalès trong không gian ta có:

$$\frac{A'I}{MN} = \frac{IA}{NO} = \frac{AA'}{OM} \Rightarrow \frac{IA}{AA'} = \frac{NO}{OM}.$$



Hình 65

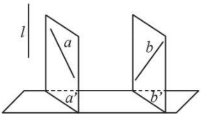
§6 PHÉP CHIẾU SONG SONG HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN

46. a) **B**. b) **A**. **47.** **A**.

48. Giả sử hai đường thẳng a, b cắt nhau tại O và hình chiếu song song của a, b, O lần lượt là a', b', O'. Như vậy, O' thuộc a', O' thuộc b'. Do đó a', b' không thể song song vì có ít nhất một điểm chung O'.

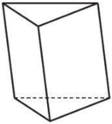
49. (*Hình 66*)

Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau có hình chiếu song song lần lượt là a' và b' lên một mặt phẳng. Nếu mặt phẳng (a, a') và mặt phẳng (b, b') song song với nhau thì $a' \parallel b'$. Vậy hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.



Hình 66

50. Vì tam giác bất kì có thể xem là hình biểu diễn của tam giác đều, do đó, hình biểu diễn của hình lăng trụ có đáy là tam giác đều có thể biểu diễn như *Hình 67*.



Hình 67

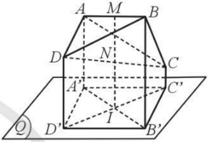
51*. (*Hình 68*)

Gọi f là phép chiếu song song có phương chiếu là đường thẳng MN, mặt phẳng chiếu là mặt phẳng (Q) bất kì cắt đường thẳng MN.

Gọi A', B', C', D' là ảnh của A, B, C, D; I là ảnh của M, N qua phép chiếu f.

Vì M là trung điểm của AB nên I là trung điểm của $A'B'$; N là trung điểm của CD nên I là trung điểm của $C'D'$. Do đó tứ giác $A'C'B'D'$ là hình bình hành.

Vậy ảnh của tứ diện $ABCD$ qua phép chiếu song song f là hình bình hành $A'C'B'D'$ cùng với hai đường chéo $A'B'$, $C'D'$ của nó.



Hình 68

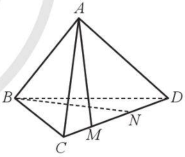
BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

52. C. **53. B**. **54. C**.

55. (*Hình 69*)

Giả sử hai đường thẳng AM và BN cắt nhau. Khi đó, qua AM và BN có một mặt phẳng (P). Do M, N thuộc (P) nên đường thẳng MN nằm trong (P) hay CD nằm trong (P). Suy ra A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng, mâu thuẫn với giả thiết.

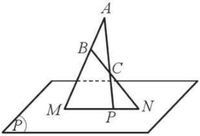
Vậy AM và BN không cắt nhau.



Hình 69

56. (*Hình 70*)

Do ba điểm A, B, C không thẳng hàng nên qua ba điểm A, B, C có một mặt phẳng, gọi là (ABC). Vì $M \in AB$ nên $M \in (ABC)$. Tương tự, ta có N và P đều thuộc (ABC). Suy ra



Hình 70

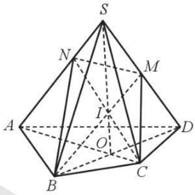
M, N, P là ba điểm chung của hai mặt phẳng (ABC) và (P). Do đó, M, N, P cùng thuộc giao tuyến của (ABC) và (P). Vậy M, N, P thẳng hàng.

57. (*Hình 71*)

a) Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) có chung điểm S. Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi O là giao điểm của AC và BD. Khi đó, SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

b) Trong mặt phẳng (SBD), gọi I là giao điểm của BM và SO. Khi đó, $I \in (SAC)$. Vậy I là giao điểm của đường thẳng BM với mặt phẳng (SAC).

c) Trong mặt phẳng (SAC), gọi N là giao điểm của CI và SA. Khi đó, BN là giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (SAB). Giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (SAD) là đường thẳng MN.

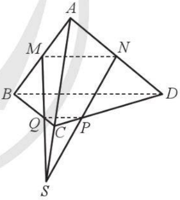


Hình 71

58. (*Hình 72*)

Giả sử M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng. Xét tam giác ABC, do Q không là trung điểm của BC nên đường thẳng MQ cắt đường thẳng AC tại điểm S. Khi đó, $S \in (MNPQ)$ và $S \in (ACD)$. Mà NP là giao tuyến của (ACD) và $(MNPQ)$ nên $S \in NP$.

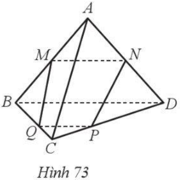
Vậy ba đường thẳng MQ, NP và AC cùng đi qua điểm S.



Hình 72

59. (*Hình 73*)

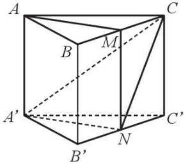
Giả sử M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng. Do MN là đường trung bình của tam giác ABD nên $MN \parallel BD$. Xét hai mặt phẳng $(MNPQ)$ và (BCD) có $MN \parallel BD$ và PQ là giao tuyến. Suy ra $PQ \parallel BD$.



Hình 73

60. (*Hình 74*)

Xét hình bình hành $BCC'B'$ có $MN \parallel BB'$ và $MN = BB'$. Do đó, $AA' \parallel MN$ và $AA' = MN$ nên $AA'NM$ là hình bình hành. Suy ra $AM \parallel A'N$, mà $A'N \subset (A'NC)$. Vậy $AM \parallel (A'NC)$.



Hình 74

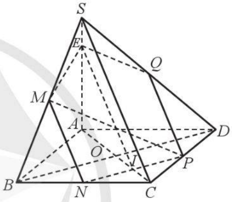
61. (*Hình 75*)

a) Do MN là đường trung bình của tam giác SBC nên $MN \parallel SC$. Từ đó suy ra $SC \parallel (MNP)$.

b) Gọi Q là trung điểm của SD, khi đó $SC \parallel QP$. Hai mặt phẳng (MNP) và (SCD) có điểm P chung và $MN \parallel SC$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SCD) là đường thẳng QP. Đồng thời, Q là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (MNP).

c) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi I là giao điểm của AC và NP. Trong mặt phẳng (SAC), lấy E thuộc SA sao cho $IE \parallel SC$. Khi đó, ta có $I \in (MNP)$ và $IE \parallel MN$ nên $E \in (MNP)$ Vậy E là giao điểm của SA với mặt phẳng (MNP).

d) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Khi đó ta có $\dfrac{CI}{CO} = \dfrac{1}{2}$. Suy ra $\dfrac{CI}{CA} = \dfrac{1}{4}$. Xét tam giác SAC, ta có $IE \parallel SC$ nên $\dfrac{SE}{SA} = \dfrac{CI}{CA} = \dfrac{1}{4}$.

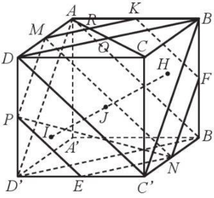


Hình 75

62. (*Hình 76*)

a) Vì $ABCD$ và $BCC'B'$ là các hình bình hành nên $AD \parallel BC$, $AD = BC$ và $BC \parallel B'C'$, $BC = B'C'$. Suy ra $AD \parallel B'C'$, $AD = B'C'$.

Vậy $ADC'B'$ là hình bình hành.



Hình 76

b) Vì $BB' // DD'$, $BB' = DD'$ nên $BDD'B'$ là hình bình hành. Do đó, $BD // B'D'$. Suy ra $BD // (AB'D')$. Ta có $AMNB'$ là hình bình hành, suy ra $MN // AB'$ nên $MN // (AB'D')$.

c) Vì $MP // AD'$ nên $MP // (AB'D')$, cùng với kết quả câu b ta có $(MNP) // (AB'D')$. Vì $BD // B'D'$ nên $BD // (AB'D')$, suy ra $BD // (MNP)$.

d*) Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của $C'D'$, $B'B$, BA. Khi đó, $PE // MN$, $NF // MP$, $KF // MN$ nên các điểm E, F, K đều thuộc mặt phẳng (MNP). Do đó giao tuyến của (MNP) với các mặt $(ADD'A')$, $(DCC'D')$, $(A'B'C'D')$, $(BCC'B')$, $(ABB'A')$ và $(ABCD)$ lần lượt là MP, PE, EN, NF, FK, KM.

e*) Theo câu d, ta có (MNP) trùng với $(MKFNEP)$. Gọi R, O lần lượt là giao điểm của AC với MK, BD. Khi đó, ta có $\dfrac{AR}{RO} = 1$ và đường thẳng AC cắt ba mặt phẳng $(AB'D')$, (MNP), $(C'BD)$ lần lượt tại A, R, O. Áp dụng định lí Thalès trong không gian, ta có $\dfrac{AR}{IJ} = \dfrac{RO}{JH} = \dfrac{AO}{IH}$. Từ đó suy ra $\dfrac{IJ}{JH} = \dfrac{AR}{RO} = 1$.

63. Học sinh tự làm.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
Địa chỉ: Tầng 6, toà nhà số 128 đường Xuân Thủy, quận Cầu Giấy, TP. Hà Nội
Điện thoại: 024.37547735
Email: nxb@hnue.edu.vn | Website: www.nxbdhsp.edu.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc – Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ CƯỜNG

Chịu trách nhiệm tổ chức bản thảo và bản quyền nội dung:
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM
Chủ tịch Hội đồng Quản trị: NGƯT NGÔ TRẦN ÁI
Tổng Giám đốc: VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập:
LÊ HUY ĐAN – NGUYỄN THỊ QUÝ – ĐÀO ANH TIẾN

Thiết kế sách và trình bày bìa:
PHAN THỊ LƯƠNG

Minh hoạ:
PHAN THỊ LƯƠNG

Sửa bản in:

LÊ TRUNG DŨNG – VŨ MẠNH HUY

Trong sách có sử dụng tư liệu, hình ảnh của một số tác giả. Trân trọng cảm ơn.

Bài tập TOÁN 11 – TẬP MỘT

Mã số:

Mã ISBN:

In .... cuốn, khổ 17 x 24 cm, tại ....

Địa chỉ: ....

Số xác nhận đăng kí xuất bản: ....

Quyết định xuất bản số: ....

In xong và nộp lưu chiểu ....

Mang cuộc sống vào bài học
Đưa bài học vào cuộc sống

BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 11
Cánh Diều

I. MÔN HỌC VÀ HOẠT ĐỘNG GIÁO DỤC BẮT BUỘC	
1	Ngữ văn 11 (Tập một, Tập hai)
2	Toán 11 (Tập một, Tập hai)
3	Lịch sử 11
4	Tiếng Anh 11 Explore New Worlds
5	Giáo dục quốc phòng và an ninh 11
6	Giáo dục thể chất 11 - Bóng đá
	Giáo dục thể chất 11 - Bóng rổ
	Giáo dục thể chất 11 - Cầu lông
	Giáo dục thể chất 11 - Đá cầu
7	Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 11
II. MÔN HỌC LỰA CHỌN	
1	Địa lí 11
2	Giáo dục kinh tế và pháp luật 11
3	Vật lí 11
4	Hoá học 11
5	Sinh học 11
6	Công nghệ 11 - Công nghệ chăn nuôi
	Công nghệ 11 - Công nghệ cơ khí
7	Tin học 11 - Khoa học máy tính
	Tin học 11 - Tin học ứng dụng
8	Âm nhạc 11
III. CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP LỰA CHỌN	
1	Chuyên đề học tập Ngữ văn 11
2	Chuyên đề học tập Toán 11
3	Chuyên đề học tập Lịch sử 11
4	Chuyên đề học tập Địa lí 11
5	Chuyên đề học tập Giáo dục kinh tế và pháp luật 11
6	Chuyên đề học tập Vật lí 11
7	Chuyên đề học tập Hoá học 11
8	Chuyên đề học tập Sinh học 11
9	Chuyên đề học tập Công nghệ 11 - Công nghệ chăn nuôi
	Chuyên đề học tập Công nghệ 11 - Công nghệ cơ khí
10	Chuyên đề học tập Tin học 11 - Khoa học máy tính
	Chuyên đề học tập Tin học 11 - Tin học ứng dụng
11	Chuyên đề học tập Âm nhạc 11

TÌM ĐỌC: CÁC SÁCH BỔ TRỢ VÀ THAM KHẢO LỚP 11 (Cánh Diều) THEO TỪNG MÔN HỌC

ISBN: 978-604-54-6030-6
9 786045 460306

Quét mã QR hoặc dùng trình duyệt web để truy cập website bộ sách Cánh Diều: www.hoc10.com

SỬ DỤNG
TEM CHỐNG GIẢ