ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN
PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG

BÀI TẬP Toán 11

TẬP HAI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ
NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN – PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG

BÀI TẬP Toán 11

TẬP HAI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ
XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
Địa chỉ: Tầng 6, toà nhà số 128 đường Xuân Thủy, quận Cầu Giấy, TP. Hà Nội
Điện thoại: 024.37547735
Email: nxb@hnue.edu.vn | Website: www.nxbdhsp.edu.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc – Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ CƯỜNG

Chịu trách nhiệm tổ chức bản thảo và bản quyền nội dung:
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM
Chủ tịch Hội đồng Quản trị: NGƯT NGÔ TRẦN ÁI
Tổng Giám đốc: VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập:
LÊ HUY ĐAN – NGUYỄN THỊ QUÝ – ĐÀO ANH TIẾN
Thiết kế sách:
NGUYỄN THỊ PHƯƠNG YÊN
Trình bày bìa:
PHAN THỊ LƯƠNG
Sửa bản in:
LÊ TRUNG DŨNG – VŨ MẠNH HUY

Trong sách có sử dụng tư liệu, hình ảnh của một số tác giả. Trân trọng cảm ơn.

Bài tập TOÁN 11 – TẬP HAI
Mã số:....................
Mã ISBN:.......................
In .... cuốn, khổ 17 x 24 cm, tại ....
Địa chỉ: ....
Số xác nhận đăng kí xuất bản: ....
Quyết định xuất bản số: ....
In xong và nộp lưu chiểu năm 2023.

Chương V

MỘT SỐ YẾU TỐ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

§1 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Mẫu số liệu ghép nhóm

a) Bảng tần số ghép nhóm

• *Mẫu số liệu ghép nhóm* là mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm.

• Mỗi nhóm số liệu gồm một số giá trị của mẫu số liệu được ghép nhóm theo một tiêu chí xác định có dạng $[a ; b)$, trong đó a là đầu mút trái, b là đầu mút phải. Độ dài nhóm là $b - a$.

• *Tần số* của một nhóm là số số liệu trong mẫu số liệu thuộc vào nhóm đó. Tần số của nhóm 1, nhóm 2, ..., nhóm m kí hiệu lần lượt là $n_1, n_2, ..., n_m$.

• *Bảng tần số ghép nhóm* được lập như ở *Bảng 1*, trong đó mẫu số liệu gồm n số liệu được chia thành m nhóm ứng với m nửa khoảng $[a_1 ; a_2); [a_2 ; a_3); ...; [a_m ; a_{m+1})$, ở đó

$$a_1 < a_2 < ... < a_m < a_{m+1} \text{ và } n = n_1 + n_2 + ... + n_m.$$

Nhóm	Tần số
$[a_1 ; a_2)$	n_1
$[a_2 ; a_3)$	n_2
...	...
$[a_m ; a_{m+1})$	n_m
	n

Bảng 1

b) Ghép nhóm mẫu số liệu. Tần số tích luỹ

Để chuyển mẫu số liệu không ghép nhóm thành mẫu số liệu ghép nhóm, ta thực hiện như sau:

• Chia miền giá trị của mẫu số liệu thành một số nhóm theo tiêu chí cho trước;

• Đếm số giá trị của mẫu số liệu thuộc mỗi nhóm (tần số) và lập bảng tần số ghép nhóm.

Chú ý: Khi ghép nhóm số liệu, ta thường phân chia các nhóm có độ dài bằng nhau và đầu mút của các nhóm có thể không phải là giá trị của mẫu số liệu. Nhóm cuối cùng có thể là $[a_m ; a_{m+1}]$.

• *Tần số tích luỹ* của một nhóm là số số liệu trong mẫu số liệu có giá trị nhỏ hơn giá trị đầu mút phải của nhóm đó. Tần số tích luỹ của nhóm 1, nhóm 2, ..., nhóm m kí hiệu lần lượt là $cf_1, cf_2, \ldots, cf_m$.

• Bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích luỹ được lập như ở *Bảng 2*.

Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
$[a_1 ; a_2)$	n_1	$cf_1 = n_1$
$[a_2 ; a_3)$	n_2	$cf_2 = n_1 + n_2$
...	...	...
$[a_m ; a_{m+1})$	n_m	$cf_m = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$
	n	

Bảng 2

2. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu ghép nhóm

a) Số trung bình cộng (số trung bình)

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở *Bảng 3*, trong đó *giá trị đại diện* của nhóm là trung điểm x_i của nửa khoảng (tính bằng trung bình cộng của hai đầu mút) ứng với nhóm i.

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[a_1 ; a_2)$	x_1	n_1
$[a_2 ; a_3)$	x_2	n_2
...	...	...
$[a_m ; a_{m+1})$	x_m	n_m
		$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$

Bảng 3

Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu $\overline{x}$, được tính theo công thức:

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_mx_m}{n}.$$

b) Trung vị

Cho mẫu số liệu ghép nhóm bao gồm cả tần số tích luỹ như ở *Bảng 2*.

Giả sử nhóm k là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{2}$, tức là $cf_{k-1} < \frac{n}{2}$ nhưng $cf_k \geq \frac{n}{2}$. Ta gọi r, d, n_k lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm k; cf_{k-1} là tần số tích luỹ của nhóm $k - 1$.

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu M_e, được tính theo công thức sau:

$$M_e = r + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf_{k-1}}{n_k} \right) . \, d \, .$$

Quy ước: $cf_0 = 0$.

c) Tứ phân vị

Cho mẫu số liệu ghép nhóm bao gồm cả tần số tích luỹ như ở *Bảng 2*.

• *Tứ phân vị thứ hai*, kí hiệu Q_2, bằng trung vị M_e.

• Giả sử nhóm p là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{4}$, tức là $cf_{p-1} < \frac{n}{4}$ nhưng $cf_p \geq \frac{n}{4}$. Ta gọi s, h, n_p lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm p; cf_{p-1} là tần số tích luỹ của nhóm $p - 1$.

Tứ phân vị thứ nhất, kí hiệu Q_1, được tính bằng công thức sau:

$$Q_1 = s + \left(\frac{\frac{n}{4} - cf_{p-1}}{n_p}\right).h.$$

• Giả sử nhóm q là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{3n}{4}$, tức là $cf_{q-1} < \frac{3n}{4}$ nhưng $cf_q \geq \frac{3n}{4}$. Ta gọi t, l, n_q lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm q; cf_{q-1} là tần số tích luỹ của nhóm $q - 1$.

Tứ phân vị thứ ba, kí hiệu Q_3, được tính bằng công thức sau:

$$Q_3 = t + \left(\frac{\frac{3n}{4} - cf_{q-1}}{n_q}\right).l.$$

d) Mốt

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở *Bảng 1*.

Giả sử nhóm i là nhóm có tần số lớn nhất. Ta gọi u, g, n_i lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm i; n_{i-1}, n_{i+1} lần lượt là tần số của nhóm $i - 1$, nhóm $i + 1$.

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu M_o, được tính theo công thức sau:

$$M_o = u + \left(\frac{n_i - n_{i-1}}{2n_i - n_{i-1} - n_{i+1}}\right).g.$$

Quy ước: $n_0 = 0$; $n_{m+1} = 0$.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Mẫu số liệu ghép nhóm. Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu

Ví dụ 1 *Bảng 4* biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm được cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm. Hãy cho biết:

a) Mẫu số liệu đó có bao nhiêu số liệu; bao nhiêu nhóm;

b) Tần số của mỗi nhóm.

Nhóm	Tần số
[0 ; 10)	8
[10 ; 20)	7
[20 ; 30)	9
[30 ; 40)	6
	$n = 30$

Bảng 4

Giải

Từ *Bảng 4*, ta thấy:

a) Mẫu số liệu đó gồm 30 số liệu và 4 nhóm.

b) Tần số của các nhóm 1, 2, 3, 4 lần lượt là 8, 7, 9, 6.

Ví dụ 2 Mẫu số liệu dưới đây ghi lại tốc độ của 42 ô tô khi đi qua một trạm đo tốc độ (đơn vị: km/h):

47,5	49,5	46	51	52,5	45	61
42	67	48	63	65	62,5	49,5
43,5	41	57,5	63,5	56,5	53	48
61,5	46	57	69	44,5	52	50
45	55	47	60	67,5	62	58
56	51,5	57,5	59	52	43	56

Lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích luỹ cho mẫu số liệu trên có sáu nhóm ứng với sáu nửa khoảng:

$$[40 ; 45), [45 ; 50), [50 ; 55), [55 ; 60), [60 ; 65), [65 ; 70).$$

Giải

Bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích luỹ như ở *Bảng 5*:

Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
[40 ; 45)	5	5
[45 ; 50)	10	15
[50 ; 55)	7	22
[55 ; 60)	9	31
[60 ; 65)	7	38
[65 ; 70)	4	42
	$n = 42$	

Bảng 5

Vấn đề 2. Xác định số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm

Ví dụ 3 Tính số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở *Bảng 5* (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Giải

Từ mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở *Bảng 5*, ta có bảng tần số ghép nhóm như ở *Bảng 6*:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[40 ; 45)	42,5	5
[45 ; 50)	47,5	10
[50 ; 55)	52,5	7
[55 ; 60)	57,5	9
[60 ; 65)	62,5	7
[65 ; 70)	67,5	4
		$n = 42$

Bảng 6

Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là:

$$\overline{x} = \frac{5 \,.\, 42,5 + 10 \,.\, 47,5 + 7 \,.\, 52,5 + 9 \,.\, 57,5 + 7 \,.\, 62,5 + 4 \,.\, 67,5}{42} \approx 54,3 \text{ (km/h)}.$$

Vấn đề 3. Xác định trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Ví dụ 4 Xác định trung vị và tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở *Bảng 5* (làm tròn các kết quả đến hàng phần mười).

Giải

Số phần tử của mẫu là $n = 42$.

• Ta có: $\frac{n}{2} = \frac{42}{2} = 21$ mà $15 < 21 < 22$. Suy ra nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 21.

Xét nhóm 3 là nhóm [50 ; 55) có $r = 50$, $d = 5$, $n_3 = 7$ và nhóm 2 là nhóm [45 ; 50) có $cf_2 = 15$.

Áp dụng công thức, ta có trung vị của mẫu số liệu là:

$$M_e = 50 + \left(\frac{21 - 15}{7}\right) . \, 5 \approx 54,3 \text{ (km/h)}.$$

Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu là: $Q_2 = M_e \approx 54,3$ (km/h).

• Ta có: $\frac{n}{4} = \frac{42}{4} = 10,5$ mà $5 < 10,5 < 15$ nên nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 10,5.

Xét nhóm 2 là nhóm [45 ; 50) có $s = 45$, $h = 5$, $n_2 = 10$ và nhóm 1 là nhóm [40 ; 45) có $cf_1 = 5$.

Áp dụng công thức, ta có tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là:

$$Q_1 = 45 + \left(\frac{10,5 - 5}{10}\right) . 5 \approx 47,8 \text{ (km/h)}.$$

• Ta có: $\frac{3n}{4} = \frac{3 . 42}{4} = 31,5$ mà $31 < 31,5 < 38$ nên nhóm 5 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 31,5.

Xét nhóm 5 là nhóm [60 ; 65) có $t = 60$, $l = 5$, $n_5 = 7$ và nhóm 4 là nhóm [55 ; 60) có $cf_4 = 31$.

Áp dụng công thức, ta có tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là:

$$Q_3 = 60 + \left(\frac{31,5 - 31}{7}\right) . 5 \approx 60,4 \text{ (km/h)}.$$

Vậy tứ phân vị của mẫu số liệu trên là:

$$Q_1 \approx 47,8 \text{ (km/h)};\ Q_2 \approx 54,3 \text{ (km/h)};\ Q_3 \approx 60,4 \text{ (km/h)}.$$

Vấn đề 5. Xác định mốt của mẫu số liệu ghép nhóm

Ví dụ 5 Xác định mốt của mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở *Bảng 5* (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Giải

Ta thấy: Nhóm 2 ứng với nửa khoảng [45 ; 50) là nhóm có tần số lớn nhất với $u = 45$; $g = 5$, $n_2 = 10$. Nhóm 1 có tần số $n_1 = 5$, nhóm 3 có tần số $n_3 = 7$.

Áp dụng công thức, ta có mốt của mẫu số liệu là:

$$M_o = 45 + \left(\frac{10 - 5}{2 . 10 - 5 - 7}\right) . 5 \approx 48,1 \text{ (km/h)}.$$

C. BÀI TẬP

1. Khi thống kê chiều cao của 40 bạn lớp 11A, ta thu được mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở *Bảng 7* (đơn vị: centimét).

a) Độ dài của mỗi nhóm bằng:

A. 155. **B.** 5. **C.** 175. **D.** 20.

b) Tần số của nhóm [160 ; 165) là bao nhiêu?

A. 5. **B.** 16.

C. 12. **D.** 7.

c) Nhóm có tần số lớn nhất là:

A. [155 ; 160). **B.** [160 ; 165).

C. [165 ; 170). **D.** [170 ; 175).

d) Giá trị cf_3 bằng:

A. 16. **B.** 17.

C. 23. **D.** 33.

Nhóm	Tần số
[155 ; 160)	5
[160 ; 165)	12
[165 ; 170)	16
[170 ; 175)	7
	$n = 40$

Bảng 7

e) Giá trị đại diện của nhóm [155 ; 160) bằng:

A. 157,5. **B.** 155. **C.** 160. **D.** 5.

g) Nhóm có giá trị đại diện bằng 162,5 là:

A. [155 ; 160). **B.** [160 ; 165). **C.** [165 ; 170). **D.** [170 ; 175).

2. Xác định các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở *Bảng 7* (làm tròn các kết quả đến hàng phần mười).

3. Cho mẫu số liệu ghép nhóm thống kê thời gian sử dụng điện thoại trước khi ngủ (đơn vị: phút) của một người trong 120 ngày như ở *Bảng 8*. Xác định các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu đó (làm tròn các kết quả đến hàng phần mười).

Nhóm	Tần số
[0 ; 4)	13
[4 ; 8)	29
[8 ; 12)	48
[12 ; 16)	22
[16 ; 20)	8
	$n = 120$

Bảng 8

4. Khi thống kê chỉ số đường huyết (đơn vị: mmol/L) của 28 người cao tuổi trong một lần đo, ta được kết quả sau:

7,5	7,2	7,5	7,1	7,9	7,4	7,0
7,1	7,5	7,2	7,1	8,0	7,9	7,7
7,5	7,6	7,7	7,2	7,6	7,6	7,5
7,3	7,4	7,2	7,1	7,2	7,1	7,0

a) Lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích luỹ có năm nhóm ứng với năm nửa khoảng: [7,0 ; 7,2), [7,2 ; 7,4), [7,4 ; 7,6), [7,6 ; 7,8), [7,8 ; 8,0].

b) Độ dài của mỗi nhóm bằng:

A. 7. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 0,2.

c) Tần số của nhóm [7,8 ; 8,0] bằng:

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.**7.

d) Giá trị cf_3 bằng:

A. 7. **B.** 13. **C.** 20. **D.** 25.

e) Giá trị đại diện của nhóm [7,4 ; 7,6) bằng:

A. 7,4. **B.** 7,6. **C.** 7,5. **D.** 2.

g) Nhóm có giá trị đại diện bằng 7,7 là:

A. [7,0 ; 7,2). **B.** [7,2 ; 7,4). **C.** [7,4 ; 7,6). **D.** [7,6 ; 7,8).

5. Với mẫu số liệu ghép nhóm thu được ở Bài 4, xác định các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu ghép nhóm đó (làm tròn các kết quả đến hàng phần mười).

§2 BIẾN CỐ HỢP VÀ BIẾN CỐ GIAO. BIẾN CỐ ĐỘC LẬP. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Xét phép thử T có không gian mẫu là tập hợp Ω gồm hữu hạn phần tử; các kết quả của phép thử là đồng khả năng, các biến cố đều liên quan đến phép thử đó.

1. Phép toán trên các biến cố

a) Biến cố hợp

Cho hai biến cố A và B. Khi đó A, B là các tập con của không gian mẫu Ω. Đặt $C = A \cup B$, ta có C là một biến cố và được gọi là *biến cố hợp* của hai biến cố A và B, kí hiệu là $A \cup B$.

b) Biến cố giao

Cho hai biến cố A và B. Khi đó A, B là các tập con của không gian mẫu Ω. Đặt $D = A \cap B$, ta có D là một biến cố và được gọi là *biến cố giao* của hai biến cố A và B, kí hiệu là $A \cap B$ hay AB.

c) Biến cố xung khắc

Cho hai biến cố A và B. Khi đó A, B là các tập con của không gian mẫu Ω. Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì A và B gọi là hai biến cố *xung khắc*.

2. Biến cố độc lập

Cho hai biến cố A và B. Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.

Chú ý: Nếu A, B là hai biến cố độc lập thì mỗi cặp biến cố sau cũng độc lập: A và $\overline{B}$; $\overline{A}$ và B; $\overline{A}$ và $\overline{B}$.

3. Các quy tắc tính xác suất

a) Công thức cộng xác suất

Cho hai biến cố A và B. Khi đó $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

Hệ quả: Nếu hai biến cố A và B là xung khắc thì $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

b) Công thức nhân xác suất

Cho hai biến cố A và B. Nếu hai biến cố A và B là độc lập thì $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \,.\, \mathrm{P}(B)$.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Xác định biến cố hợp, biến cố giao, biến cố xung khắc, biến cố độc lập

Ví dụ 1 Một hộp có 10 viên bi màu xanh và 15 viên bi màu đỏ, các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên hai viên bi. Xét các biến cố:

A: "Hai viên bi được lấy ra có cùng màu xanh";

B: "Hai viên bi được lấy ra có cùng màu đỏ";

C: "Hai viên bi được lấy ra cùng màu";

D: "Hai viên bi được lấy ra khác màu".

Chọn phát biểu đúng trong những phát biểu sau đây:

a) Biến cố hợp của hai biến cố A và B là biến cố C.

b) Biến cố hợp của hai biến cố A và B là biến cố D.

c) Biến cố hợp của hai biến cố A và C là biến cố C.

Giải

Phát biểu a) đúng; phát biểu b) sai; phát biểu c) đúng.

Ví dụ 2 Gieo một xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xét các biến cố:

A: "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất là số lẻ";

B: "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai là số lẻ".

Chọn phát biểu đúng trong những phát biểu sau đây:

a) Biến cố giao của hai biến cố A và B là "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất là số lẻ hoặc số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai là số lẻ".

b) Biến cố giao của hai biến cố A và B là "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất là số lẻ và số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai là số lẻ".

c) Biến cố giao của hai biến cố A và B là "Tích số chấm xuất hiện ở hai lần gieo là số lẻ".

d) Biến cố giao của hai biến cố A và B là "Tích số chấm xuất hiện ở hai lần gieo là số chẵn".

Giải

Phát biểu a) sai; phát biểu b) đúng; phát biểu c) đúng; phát biểu d) sai.

Ví dụ 3 Tung một đồng xu cân đối và đồng chất ba lần liên tiếp. Xét các biến cố:

A: "Đồng xu xuất hiện mặt sấp (S) ở lần tung thứ nhất";

B: "Đồng xu xuất hiện mặt ngửa (N) ở lần tung thứ nhất".

Hai biến cố trên có xung khắc hay không?

Giải

Ta có: $A = \{SSS; SSN; SNS; SNN\}$, $B = \{NSS; NSN; NNS; NNN\}$.

Suy ra $A \cap B = \varnothing$. Do đó A và B là hai biến cố xung khắc.

Ví dụ 4 Một hộp có 7 viên bi màu xanh và 8 viên bi màu đỏ, các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy viên bi ngẫu nhiên hai lần liên tiếp, trong đó mỗi lần lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp, ghi lại màu của viên bi lấy ra và bỏ lại viên bi đó vào hộp. Xét các biến cố:

A: Viên bi màu đỏ được lấy ra ở lần thứ nhất;

B: Viên bi màu xanh được lấy ra ở lần thứ hai.

Hai biến cố A và B có độc lập không? Vì sao?

Giải

Trước hết, xác suất của biến cố B khi biến cố A xảy ra bằng $\frac{7}{15}$, xác suất của biến cố B khi biến cố A không xảy ra cũng bằng $\frac{7}{15}$. Do đó việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố A không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố B. Mặt khác, xác suất của biến cố A bằng $\frac{8}{15}$, không phụ thuộc vào việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố B. Vậy hai biến cố A và B là độc lập.

Vấn đề 2. Tính xác suất của biến cố bằng các quy tắc tính xác suất

Ví dụ 5 Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương có hai chữ số. Xét các biến cố:

A: "Số được chọn chia hết cho 5";

B: "Số được chọn chia hết cho 7".

Tính $P(A \cup B)$.

Giải

Trong 90 số có hai chữ số, có 18 số chia hết cho 5, có 13 số chia hết cho 7 và có 2 số chia hết cho cả 5 và 7. Vì thế, ta có: $P(A) = \frac{18}{90}$, $P(B) = \frac{13}{90}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{90}$.

Vậy $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{18}{90} + \frac{13}{90} - \frac{2}{90} = \frac{29}{90}$.

Ví dụ 6 Một xưởng sản xuất có hai động cơ chạy độc lập với nhau. Xác suất để động cơ I và động cơ II chạy tốt lần lượt là 0,7 và 0,8. Tính xác suất của biến cố C: "Cả hai động cơ đều chạy tốt".

Giải

Xét biến cố A: "Động cơ I chạy tốt", ta có: $P(A) = 0,7$.

Xét biến cố B: "Động cơ II chạy tốt", ta có: $P(B) = 0,8$.

Ta thấy A và B là hai biến cố độc lập và $C = A \cap B$.

Suy ra $P(C) = P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B) = 0,7 \,.\, 0,8 = 0,56$.

Ví dụ 7 Trong một giải bóng đá có hai đội Tín Phát và An Bình ở hai bảng khác nhau. Mỗi bảng chọn ra một đội để vào vòng chung kết. Xác suất lọt qua vòng bảng của hai đội Tín Phát và An Bình lần lượt là 0,6 và 0,7. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) A: "Cả hai đội Tín Phát và An Bình lọt vào vòng chung kết";

b) B: "Có ít nhất một đội lọt vào vòng chung kết";

c) C: "Chỉ có đội Tín Phát lọt vào vòng chung kết".

Giải

Xét các biến cố:

E: "Đội Tín Phát lọt vào vòng chung kết";

G: "Đội An Bình lọt vào vòng chung kết".

Vì hai đội ở hai bảng khác nhau nên hai biến cố E và G là hai biến cố độc lập, ta có: $P(E) = 0{,}6$ và $P(G) = 0{,}7$.

a) Vì $A = E \cap G$ nên $P(A) = P(E \cap G) = P(E) \, . \, P(G) = 0{,}6 \, . \, 0{,}7 = 0{,}42$.

b) Vì $B = E \cup G$ nên

$$P(B) = P(E \cup G) = P(E) + P(G) - P(E \cap G) = 0{,}6 + 0{,}7 - 0{,}42 = 0{,}88.$$

c) Xét biến cố đối $\overline{G}$ của biến cố G. Ta có: $P(\overline{G}) = 1 - P(G) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

Vì E và $\overline{G}$ là hai biến cố độc lập và $C = E \cap \overline{G}$ nên

$$P(C) = P(E \cap \overline{G}) = P(E) \, . \, P(\overline{G}) = 0{,}6 \, . \, 0{,}3 = 0{,}18.$$

Vấn đề 3. Tính xác suất của biến cố bằng phương pháp tổ hợp

Ví dụ 8 Một công ty đón đoàn khách bao gồm khách đến từ nước Anh và khách đến từ nước Pháp. Công ty chọn 3 cán bộ phiên dịch từ một nhóm cán bộ phiên dịch có 19 người, trong đó có 10 cán bộ phiên dịch tiếng Anh và 9 cán bộ phiên dịch tiếng Pháp, mỗi người chỉ phiên dịch được một thứ tiếng.

a) Công ty có bao nhiêu cách chọn 3 cán bộ sao cho có cả cán bộ phiên dịch tiếng Anh và cán bộ phiên dịch tiếng Pháp?

b) Tính xác suất của biến cố "Trong 3 cán bộ được chọn có cả cán bộ phiên dịch tiếng Anh và cán bộ phiên dịch tiếng Pháp".

Giải

a) Xét các biến cố:

A: "Trong 3 cán bộ được chọn có cả cán bộ phiên dịch tiếng Anh và cán bộ phiên dịch tiếng Pháp".

B: "Trong 3 cán bộ được chọn có 1 cán bộ phiên dịch tiếng Anh và 2 cán bộ phiên dịch tiếng Pháp".

C: "Trong 3 cán bộ được chọn có 2 cán bộ phiên dịch tiếng Anh và 1 cán bộ phiên dịch tiếng Pháp".

Ta có: $A = B \cup C$, $B \cap C = \varnothing$, suy ra $n(A) = n(B) + n(C)$.

Số các kết quả thuận lợi cho biến cố B là $n(B) = C_{10}^{1} \, . \, C_{9}^{2} = 360$.

Số các kết quả thuận lợi cho biến cố C là $n(C) = C_{9}^{1} \, . \, C_{10}^{2} = 405$.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $n(A) = n(B) + n(C) = 360 + 405 = 765$.

Vậy công ty có 765 cách chọn 3 cán bộ sao cho có cả cán bộ phiên dịch tiếng Anh và cán bộ phiên dịch tiếng Pháp

b) Mỗi cách chọn 3 cán bộ từ 19 cán bộ phiên dịch cho ta một tổ hợp chập 3 của 19 phần tử. Do đó, không gian mẫu Ω gồm các tổ hợp chập 3 của 19 phần tử và $n(\Omega) = \mathrm{C}_{19}^{3} = 969$.

Vậy xác suất của biến cố A là: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{765}{969} = \dfrac{15}{19}$.

Vấn đề 6. Tính xác suất của biến cố bằng sơ đồ hình cây

Ví dụ 9 Một người cho ngẫu nhiên 3 lá thư vào 3 chiếc phong bì đã ghi địa chỉ sao cho mỗi phong bì chỉ chứa một lá thư. Tính xác suất để có ít nhất một lá thư được cho vào đúng phong bì đã ghi địa chỉ theo lá thư đó.

Giải

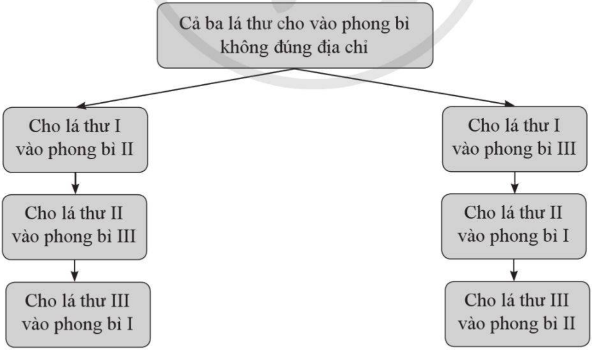
Giả sử lá thư I, lá thư II, lá thư III tương ứng với các phong bì đã ghi đúng địa chỉ là phong bì I, phong bì II, phong bì III.

Mỗi cách chọn 3 phong bì cho 3 lá thư tương ứng với một hoán vị của 3 phần tử. Do đó số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 3! = 6$.

Gọi A là biến cố có ít nhất một lá thư được cho vào đúng phong bì đã ghi địa chỉ theo lá thư đó.

Khi đó biến cố đối của biến cố A là $\overline{A}$: "Cả ba lá thư được cho vào phong bì không đúng địa chỉ".

Sơ đồ hình cây biểu thị các khả năng thuận lợi cho biến cố $\overline{A}$.



Suy ra $n(\overline{A}) = 1 + 1 = 2$.

Khi đó $P(\overline{A}) = \dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

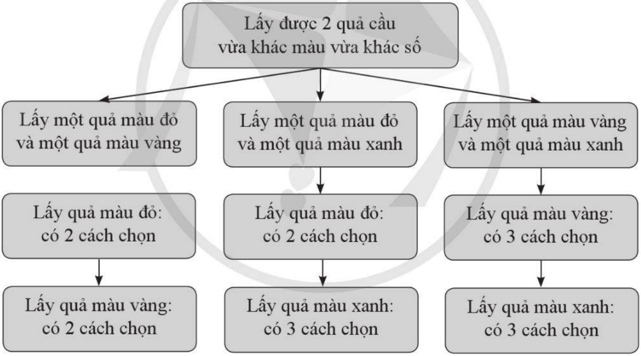
Ví dụ 10 Một hộp chứa 9 quả cầu có cùng kích thước và khối lượng, trong đó có 4 quả cầu màu xanh đánh số từ 1 đến 4, có 3 quả cầu màu vàng đánh số từ 1 đến 3, có 2 quả cầu màu đỏ đánh số 1 và 2. Lấy ngẫu nhiên 2 quả cầu từ hộp. Tính xác suất để 2 quả cầu được lấy vừa khác màu vừa khác số.

Giải

Mỗi cách lấy ngẫu nhiên 2 quả cầu từ một hộp có 9 quả cầu cho ta một tổ hợp chập 2 của 9 phần tử. Do đó không gian mẫu Ω gồm các tổ hợp chập 2 của 9 phần tử và $n(\Omega) = C_9^2 = 36$.

Xét biến cố A: "Lấy được 2 quả cầu vừa khác màu vừa khác số".

Sơ đồ hình cây biểu thị các khả năng thuận lợi cho biến cố A.



Suy ra $n(A) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 19$. Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{19}{36}$.

C. BÀI TẬP

6. Một hộp có 20 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 19, 20; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ trong hộp. Xét các biến cố:

A: "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 2";

B: "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 5";

C: "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 2 hoặc chia hết cho 5";

D: "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số vừa chia hết cho 2 vừa chia hết cho 5".

a) Biến cố C là biến cố hợp của:

A. Biến cố B và biến cố D.

B. Biến cố A và biến cố D.

C. Biến cố A và biến cố B.

D. Biến cố A và biến cố D hoặc biến cố B và biến cố D.

b) Biến cố D là biến cố giao của:

A. Biến cố B và biến cố C.

B. Biến cố A và biến cố B.

C. Biến cố A và biến cố C.

D. Biến cố A và biến cố C hoặc biến cố B và biến cố C.

7. Một lớp học có 35 học sinh gồm 20 nam và 15 nữ. Chọn ngẫu nhiên ra 2 học sinh để phân công trực nhật.

a) Xét các biến cố sau:

A: "Hai học sinh được chọn đều là học sinh nam";

B: "Hai học sinh được chọn đều là học sinh nữ";

C: "Hai học sinh được chọn có cùng giới tính".

Trong ba biến cố A, B, C, biến cố nào là biến cố hợp của hai biến cố còn lại?

b) Xét các biến cố sau:

D: "Hai học sinh được chọn gồm một bạn nam và một bạn nữ";

E: "Trong hai học sinh được chọn, có ít nhất một học sinh nữ";

G: "Trong hai học sinh được chọn, có ít nhất một học sinh nam".

Trong ba biến cố D, E, G, biến cố nào là biến cố giao của hai biến cố còn lại?

8. Một ban văn nghệ có 20 người, trong đó có 8 nam và 12 nữ. Chọn ngẫu nhiên ra 5 người để tập múa. Xét các biến cố sau:

M: "Trong 5 người được chọn, số nam lớn hơn 3";

N: "Trong 5 người được chọn, số nữ nhỏ hơn 3";

P: "Trong 5 người được chọn, số nam không vượt quá 3".

Trong ba biến cố M, N, P, hai biến cố nào là xung khắc?

9. Gieo một xúc xắc cân đối và đồng chất ba lần liên tiếp. Xét các biến cố sau:

A: "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất lớn hơn 3";

B: "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai nhỏ hơn 3";

C: "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ ba lớn hơn 3";

D: "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất nhỏ hơn 3".

Trong các biến cố trên, tìm:

a) Một cặp biến cố xung khắc;

b) Ba cặp biến cố độc lập.

10. Tung một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp.

a) Viết các kết quả thuận lợi của không gian mẫu Ω và hai biến cố A: "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt sấp", B: "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt ngửa".

b) Viết các kết quả thuận lợi của mỗi biến cố $A \cup B$, $A \cap B$.

c) Tính $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$. Cho biết A và B có là hai biến cố xung khắc không; A và B có là hai biến cố độc lập không.

11. Xét các biến cố A, B liên quan đến cùng một phép thử thoả mãn $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,5$, $P(A \cup B) = 0,6$. Hai biến cố A và B có xung khắc không? Vì sao?

12. Xét các biến cố A, B liên quan đến cùng một phép thử thoả mãn $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,4$, $P(A \cap B) = 0,1$. Hai biến cố A và B có độc lập không? Vì sao?

13. Gieo một xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp.

a) Không gian mẫu Ω có bao nhiêu phần tử?

b) Xét các biến cố:

A: "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất là 2";

B: "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai là 3".

Tính xác suất của các biến cố A, B, $A \cap B$.

14. Cho hai biến cố độc lập A và B cùng liên quan đến một phép thử thoả mãn $P(A) = 0,2$ và $P(B) = 0,3$.

Tính xác suất của các biến cố: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$ và $\overline{A} \cap \overline{B}$.

15. Hai bệnh nhân cùng nhiễm một loại virus. Xác suất biến chứng nặng của bệnh nhân thứ nhất và bệnh nhân thứ hai lần lượt là 0,2 và 0,25; khả năng bị biến chứng nặng của hai bệnh nhân là độc lập. Tính xác suất của các biến cố:

a) M: "Bệnh nhân thứ nhất và bệnh nhân thứ hai đều bị biến chứng nặng";

b) N: "Bệnh nhân thứ nhất không bị biến chứng nặng và bệnh nhân thứ hai bị biến chứng nặng";

c) Q: "Bệnh nhân thứ nhất bị biến chứng nặng và bệnh nhân thứ hai không bị biến chứng nặng";

d) R: "Bệnh nhân thứ nhất và bệnh nhân thứ hai đều không bị biến chứng nặng";

e) S: "Có ít nhất một trong hai bệnh nhân bị biến chứng nặng".

16. Một lớp học có 40 học sinh, trong đó có 25 học sinh thích chơi cầu lông, 20 học sinh thích chơi bóng bàn, 12 học sinh thích chơi cả cầu lông và bóng bàn. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Tính xác suất của các biến cố:

a) A: "Học sinh được chọn thích chơi cầu lông";

b) B: "Học sinh được chọn thích chơi bóng bàn";

c) C: "Học sinh được chọn vừa thích chơi cầu lông vừa thích chơi bóng bàn";

d) D: "Học sinh được chọn thích chơi ít nhất một trong hai môn thể thao là cầu lông hoặc bóng bàn".

17. Một nồi cơm điện gồm hai van bảo hiểm hoạt động độc lập. Xác suất hoạt động tốt của van I và van II lần lượt là 0,8 và 0,6. Nồi cơm điện hoạt động an toàn khi có ít nhất một van hoạt động tốt. Tính xác suất nồi cơm điện hoạt động an toàn.

18. Hai xạ thủ A và B cùng lúc bắn vào một mục tiêu một cách độc lập. Xác suất bắn trúng mục tiêu đó của hai xạ thủ A và B lần lượt là 0,6 và 0,65. Mục tiêu bị hạ nếu có ít nhất một xạ thủ bắn trúng mục tiêu. Tính xác suất của biến cố D: "Mục tiêu bị hạ bởi hai xạ thủ".

19. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 21 số nguyên dương đầu tiên. Tính xác suất của các biến cố:

a) A: "Hai số được chọn là số chẵn";

b) B: "Hai số được chọn là số lẻ";

c) C: "Tổng của hai số được chọn là số chẵn".

20. Trong một ngày bán hàng khuyến mại, cửa hàng để lẫn cả sản phẩm loại I và sản phẩm loại II vào một hộp, các sản phẩm có hình thức bề ngoài giống nhau và đồng giá. Trong hộp có 10 sản phẩm loại I và 18 sản phẩm loại II. Một người lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm. Tính xác suất của biến cố A: "Trong ba sản phẩm lấy được, có cả sản phẩm loại I và sản phẩm loại II".

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

21. Nếu A và B là hai biến cố thì $P(A \cup B)$ bằng:

A. $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
B. $P(A) - P(B) - P(A \cap B)$.
C. $P(A) . P(B) - P(A \cap B)$.
D. $P(A) . P(B) + P(A \cap B)$.

22. Nếu A và B là hai biến cố xung khắc thì $P(A \cup B)$ bằng:

A. $P(A) . P(B)$.
B. $P(A) - P(B)$
C. $P(A) + P(A \cap B)$.
D. $P(A) + P(B)$.

23. Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì $P(A \cap B)$ bằng:

A. $P(A) + P(B)$.
B. $P(A) - P(B)$.
C. $P(A) . P(B)$.
D. $P(A \cup B) - P(B)$.

24. Một hộp có 10 viên bi màu hồng và 14 viên bi màu vàng, các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên hai viên bi. Xét các biến cố:

P: "Hai viên bi được lấy ra có màu hồng";

Q: "Hai viên bi được lấy ra có màu vàng".

Khi đó, biến cố hợp của hai biến cố P và Q là:

A. "Hai viên bi được lấy ra chỉ có màu hồng".
B. "Hai viên bi được lấy ra có cùng màu".
C. "Hai viên bi được lấy ra chỉ có màu vàng".
D. "Hai viên bi được lấy ra có màu khác nhau".

25. Trên giá sách có các quyển vở không nhãn xếp cạnh nhau với bề ngoài, khối lượng và kích thước giống hệt nhau, trong đó có 5 quyển ghi môn Toán, 5 quyển ghi môn Ngữ Văn và 3 quyển ghi môn Tiếng Anh. Lấy ngẫu nhiên hai quyển vở. Xét các biến cố:

M: "Trong hai quyển vở được lấy, chỉ có 1 quyển ghi môn Tiếng Anh";

N: "Trong hai quyển vở được lấy, chỉ có 1 quyển ghi môn Ngữ Văn".

Khi đó, biến cố giao của hai biến cố M và N là:

A. "Hai quyển vở được lấy ghi cùng một môn".
B. "Hai quyển vở được lấy ghi hai môn khác nhau".
C. "Trong hai quyển vở được lấy, một quyển ghi môn Tiếng Anh và một quyển ghi môn Ngữ Văn".
D. "Hai quyển vở được lấy có ít nhất một quyển ghi môn Tiếng Anh".

26. Cho n là số nguyên dương lớn hơn 2. Chọn ngẫu nhiên hai số nguyên dương từ tập hợp $\{1; 2; 3; ...; 2n; 2n + 1\}$. Tính xác suất để hai số được chọn có tích là số chẵn.

27. Người ta ghi lại tốc độ của 40 xe đạp đi qua một vị trí trên đường. Mẫu số liệu dưới đây ghi lại tốc độ của 40 xe đó (đơn vị: km/h):

10	10,4	11	16	12	13	15,8	12,7	16,8	19
17	15,1	14	12,3	17,2	10,5	13,2	18,1	19,6	17,4
11,8	13,6	12,7	15,9	14,2	12,6	11,6	10,4	14,1	15,1
12,3	15,2	11,9	16,3	18,4	17,1	14,2	12,1	13,7	13,2

a) Lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy có năm nhóm ứng với sáu nửa khoảng: [10 ; 12), [12 ; 14), [14 ; 16), [16 ; 18), [18 ; 20).

b) Xác định các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn các kết quả đến hàng phần mười).

28. Bạn Nam có 10 quyển sách sinh học, 20 quyển sách khoa học và 5 quyển sách văn học muốn mang đi quyên góp cho các thư viện gần nhà. Bạn Nam chọn ngẫu nhiên 3 quyển sách để mang tới thư viện trường. Tính xác suất ba quyển sách được chọn đôi một thể loại khác nhau.

29*. Một câu lạc bộ cờ của trường có 10 bạn, trong đó có 4 bạn biết chơi cờ tướng, 6 bạn biết chơi cờ vua, mỗi bạn chỉ biết chơi một loại cờ. Nhà trường chọn ngẫu nhiên 4 bạn để tham gia buổi giao lưu cờ giữa các học sinh trong thành phố. Tính xác suất của biến cố "Trong 4 bạn được chọn, có ít nhất một bạn biết chơi cờ tướng, ít nhất một bạn biết chơi cờ vua".

30. Hai bạn An và Bình cùng tập ném bóng rổ một cách độc lập ở hai nửa sân khác nhau. Xác suất bạn An và bạn Bình ném bóng vào rổ lần lượt là 0,6 và 0,9. Trong cùng một lần ném, tính xác suất có ít nhất một bạn ném bóng vào rổ.

31*. Bạn Nam tham gia một trò chơi rút thăm trúng thưởng. Hộp đựng thăm có 50 lá thăm cứng với kích thước và khối lượng như nhau, trong đó có 20 lá trúng thưởng, 30 lá không trúng thưởng. Mỗi người được rút 2 lần (sau mỗi lần rút thì ghi kết quả và bỏ lại thăm vào hộp), mỗi lần 2 lá thăm. Nếu rút được 2 lá trúng thưởng thì được 1 tai nghe, nếu rút được 3 lá trúng thưởng thì được 1 tai nghe và 1 bàn phím, nếu rút được 4 lá trúng thưởng thì được 1 máy tính bảng. Tính xác suất để bạn Nam được trúng thưởng có tai nghe (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

§1 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

1. a) **B**. b) **C**. c) **C**. d) **D**. e) **A**. g) **B**.

2. Số trung bình cộng là:

$$\overline{x} = \frac{5 \,.\, 157,5 + 12 \,.\, 162,5 + 16 \,.\, 167,5 + 7 \,.\, 172,5}{40} \approx 165,6.$$

Bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích luỹ được cho như ở *Bảng 9*:

Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
[155 ; 160)	5	5
[160 ; 165)	12	17
[165 ; 170)	16	33
[170 ; 175)	7	40
	$n = 40$	

Bảng 9

Ta có: $\frac{n}{2} = 20$, $\frac{n}{4} = 10$, $\frac{3n}{4} = 30$.

Vì $17 < 20 < 33$ nên nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 20.

Suy ra trung vị là:

$$M_e = 165 + \left(\frac{20-17}{16}\right) . \, 5 \approx 165,9.$$

Tứ phân vị thứ hai là: $Q_2 = M_e \approx 165,9$.

Vì $5 < 10 < 17$ nên nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 10. Suy ra tứ phân vị thứ nhất là:

$$Q_1 = 160 + \left(\frac{10-5}{12}\right) . \, 5 \approx 162,1.$$

Vì $17 < 30 < 33$ nên nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 30. Suy ra tứ phân vị thứ ba là:

$$Q_3 = 165 + \left(\frac{30-17}{16}\right) . \, 5 \approx 169,1.$$

Trong các nhóm, nhóm 3 có tần số lớn nhất. Suy ra mốt là:

$$M_o = 165 + \left(\frac{16-12}{2 \,.\, 16 - 12 - 7}\right) . \, 5 \approx 166,5.$$

3. Số trung bình cộng là:

$$\overline{x} = \frac{13 \,.\, 2 + 29 \,.\, 6 + 48 \,.\, 10 + 22 \,.\, 14 + 8 \,.\, 18}{120} \approx 9,4.$$

Bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích luỹ được cho như ở *Bảng 10*:

Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
[0 ; 4)	13	13
[4 ; 8)	29	42
[8 ; 12)	48	90
[12 ; 16)	22	112
[16 ; 20)	8	120
	$n = 120$	

Bảng 10

Ta có: $\frac{n}{2} = 60$, $\frac{n}{4} = 30$, $\frac{3n}{4} = 90$.

Vì $42 < 60 < 90$ nên nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 60.

Suy ra trung vị là:

$$M_e = 8 + \left(\frac{60 - 42}{48}\right). 4 = 9,5.$$

Tứ phân vị thứ hai là: $Q_2 = M_e = 9,5$.

Vì $13 < 30 < 42$ nên nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 30. Suy ra tứ phân vị thứ nhất là:

$$Q_1 = 4 + \left(\frac{30 - 13}{29}\right). 4 \approx 6,3.$$

Vì $42 < 90 \leq 90$ nên nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 90. Suy ra tứ phân vị thứ ba là:

$$Q_3 = 8 + \left(\frac{90 - 42}{48}\right). 4 = 12.$$

Trong các nhóm, nhóm 3 có tần số lớn nhất. Suy ra mốt là:

$$M_o = 8 + \left(\frac{48 - 29}{2 . 48 - 29 - 22}\right). 4 \approx 9,7.$$

4. a) Bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích luỹ được cho như ở *Bảng 11*:

Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
[7,0 ; 7,2)	7	7
[7,2 ; 7,4)	6	13
[7,4 ; 7,6)	7	20
[7,6 ; 7,8)	5	25
[7,8 ; 8,0]	3	28
	$n = 28$	

Bảng 11

b) **D**. c) **A**. d) **C**. e) **C**. g) **D**.

5. Số trung bình cộng là:

$$\overline{x} = \frac{7 \,.\, 7{,}1 + 6 \,.\, 7{,}3 + 7 \,.\, 7{,}5 + 5 \,.\, 7{,}7 + 3 \,.\, 7{,}9}{28} \approx 7{,}4.$$

Ta có: $\frac{n}{2} = 14$, $\frac{n}{4} = 7$, $\frac{3n}{4} = 21$.

Vì $13 < 14 < 20$ nên nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 14.

Suy ra trung vị là: $M_e = 7{,}4 + \left(\frac{14-13}{7}\right) . \, 0{,}2 \approx 7{,}4$.

Tứ phân vị thứ hai là: $Q_2 = M_e \approx 7{,}4$.

Vì $0 < 7 \le 7$ nên nhóm 1 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 7. Suy ra tứ phân vị thứ nhất là:

$$Q_1 = 7{,}0 + \left(\frac{7-0}{7}\right) . \, 0{,}2 = 7{,}2.$$

Vì $20 < 21 < 25$ nên nhóm 4 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 21. Suy ra tứ phân vị thứ ba là:

$$Q_3 = 7{,}6 + \left(\frac{21-20}{5}\right) . \, 0{,}2 \approx 7{,}6.$$

Trong các nhóm, nhóm 1 và nhóm 3 có tần số lớn nhất nên ta có hai mốt là:

$$M_o = 7{,}0 + \left(\frac{7-0}{2 \,.\, 7 - 0 - 6}\right) . \, 0{,}2 \approx 7{,}2;$$

$$M_o' = 7{,}4 + \left(\frac{7-6}{2 \,.\, 7 - 6 - 5}\right) . \, 0{,}2 \approx 7{,}5.$$

§2 BIẾN CỐ HỢP VÀ BIẾN CỐ GIAO. BIẾN CỐ ĐỘC LẬP. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

6. a) **C**. b) **B**.

7. a) Biến cố C là biến cố hợp của hai biến cố A và B.

b) Biến cố D là biến cố giao của hai biến cố E và G.

8. Biến cố M và biến cố P là xung khắc.

9. a) Một cặp biến cố xung khắc là A và D.

b) Ba cặp biến cố độc lập là: A và B, A và C, B và C.

10. a) Kí hiệu S là mặt sấp, N là mặt ngửa.

$$\Omega = \{SS; SN; NS; NN\}; A = \{SS; SN; NS\}; B = \{NS; SN; NN\}.$$

b) $A \cup B = \{SS; SN; NS; NN\} = \Omega$; $A \cap B = \{SN; NS\}$.

c) $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{4}$; $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{4}$;

$P(A \cup B) = \dfrac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = 1$; $P(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{2}$.

Vì $A \cap B \neq \varnothing$ nên A và B không là hai biến cố xung khắc.

Vì $P(A \cap B) \neq P(A) \,.\, P(B)$ nên A và B không là hai biến cố độc lập.

11. Ta có: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ nên $P(A \cap B) = 0,4 + 0,5 - 0,6 = 0,3$.

Suy ra $A \cap B \neq \varnothing$. Vậy A và B không là hai biến cố xung khắc.

12. Ta có: $P(A \cap B) \neq P(A) \,.\, P(B)$ nên A và B không là hai biến cố độc lập.

13. a) $n(\Omega) = 6 \,.\, 6 = 36$.

b) $n(A) = n(B) = 6$. Suy ra $P(A) = \dfrac{1}{6}$, $P(B) = \dfrac{1}{6}$.

A và B là hai biến cố độc lập nên $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B) = \dfrac{1}{6} \,.\, \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{36}$.

14. $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,2 = 0,8$; $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,3 = 0,7$.

A và B là hai biến cố độc lập nên các cặp biến cố sau cũng độc lập: $\overline{A}$ và B, A và $\overline{B}$, $\overline{A}$ và $\overline{B}$. Ta có: $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B) = 0,2 \,.\, 0,3 = 0,06$.

Tương tự ta có: $P(\overline{A} \cap B) = 0,24$; $P(A \cap \overline{B}) = 0,14$; $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,56$;

15. Xét hai biến cố A: "Bệnh nhân thứ nhất bị biến chứng nặng";

B: "Bệnh nhân thứ hai bị biến chứng nặng".

A và B là hai biến cố độc lập, $n(A) = 0,2$, $n(B) = 0,25$.

a) $P(M) = P(A \cap B) = 0,2 \,.\, 0,25 = 0,05$.

b) $P(N) = P(\overline{A} \cap B) = 0,8 \,.\, 0,25 = 0,2$.

c) $P(Q) = P(A \cap \overline{B}) = 0,2 \,.\, 0,75 = 0,15$.

d) $P(R) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,8 \,.\, 0,75 = 0,6$.

e) $P(S) = 1 - P(R) = 1 - 0,6 = 0,4$.

16. a) $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{25}{40}=\dfrac{5}{8}$.   b) $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}=\dfrac{20}{40}=\dfrac{1}{2}$.

c) $P(C)=\dfrac{n(C)}{n(\Omega)}=\dfrac{12}{40}=\dfrac{3}{10}$.

d) $P(D)=P(A)+P(B)-P(C)=\dfrac{5}{8}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{10}=\dfrac{33}{40}$.

17. Xét biến cố A: "Van I hoạt động tốt"; B: "Van II hoạt động tốt";

C: "Nồi cơm điện hoạt động an toàn".

A và B là hai biến cố độc lập.

Ta có: $P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)\,.\,P(B)$

$=0{,}8+0{,}6-0{,}8\,.\,0{,}6=0{,}92$.

18. $P(D)=0{,}86$.

19. Trong 21 số nguyên dương đầu tiên có 10 số chẵn và 11 số lẻ.

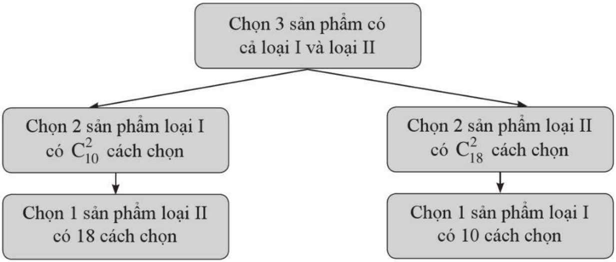
a) $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{C_{10}^2}{C_{21}^2}=\dfrac{3}{14}$.   b) $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}=\dfrac{C_{11}^2}{C_{21}^2}=\dfrac{11}{42}$.

c) Vì tổng của hai số là số chẵn khi hai số đó cùng chẵn hoặc cùng lẻ, mà A và B là hai biến cố xung khắc nên

$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{14}+\frac{11}{42}=\frac{10}{21}.$$

20. Mỗi cách lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm từ một hộp có 28 sản phẩm cho ta một tổ hợp chập 3 của 28 phần tử. Do đó không gian mẫu Ω gồm các tổ hợp chập 3 của 28 phần tử và $n(\Omega)=C_{28}^3=3\,276$.

Sơ đồ hình cây biểu thị các khả năng thuận lợi cho biến cố A.



Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là:

$$n(A) = C_{10}^2 \ .\ 18 + C_{18}^2 \ .\ 10 = 2\ 340.$$

Xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2\ 340}{3\ 276} = \frac{5}{7}.$$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

21. A. **22. D.** **23. C.** **24. B.** **25. C.**

26. Tích hai số được chọn là số chẵn khi hai số được chọn là cùng chẵn hoặc một số lẻ và một số chẵn.

Xét biến cố A: "Hai số được chọn có tích là số chẵn".

$$P(A) = \frac{C_n^2 + C_{n+1}^1 \ .\ C_n^1}{C_{2n+1}^2}.$$

27. a) Bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích luỹ được cho như ở *Bảng 12*:

Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
[10 ; 12)	8	8
[12 ; 14)	12	20
[14 ; 16)	9	29
[16 ; 18)	7	36
[18 ; 20)	4	40
	$n = 40$	

Bảng 12

b) Ta có: $\frac{n}{2} = 20$, $\frac{n}{4} = 10$, $\frac{3n}{4} = 30$. Vì $8 < 20 \leq 20$ nên nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 20.

Suy ra trung vị là:

$$M_e = 12 + \left(\frac{20 - 8}{12}\right) .\ 2 = 14.$$

Tứ phân vị thứ hai là: $Q_2 = M_e = 14$.

Vì $8 < 10 < 20$ nên nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 10. Suy ra tứ phân vị thứ nhất là:

$$Q_1 = 12 + \left(\frac{10-8}{12}\right).\,2 \approx 12,3.$$

Vì $29 < 30 < 36$ nên nhóm 4 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 30. Suy ra tứ phân vị thứ ba là:

$$Q_3 = 16 + \left(\frac{30-29}{7}\right).\,2 \approx 16,3.$$

Trong các nhóm, nhóm 2 có tần số lớn nhất. Suy ra mốt là:

$$M_o = 12 + \left(\frac{12-8}{2\,.\,12-8-9}\right).\,2 \approx 13,1.$$

28. Không gian mẫu Ω là các cách chọn ngẫu nhiên 3 quyển sách từ 35 quyển sách của bạn Nam, khi đó

$$n(\Omega) = C_{35}^{3} = 6\,545.$$

Gọi biến cố A: "Ba quyển sách được chọn đôi một thể loại khác nhau". Khi đó, chọn 1 quyển sách sinh học có 10 cách, chọn 1 quyển sách địa lí có 20 cách, chọn 1 quyển sách văn học có 5 cách nên $n(A) = 10\,.\,20\,.\,5 = 1\,000$.

Vậy xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1\,000}{6\,545} = \frac{200}{1\,309}.$$

29*. Không gian mẫu Ω là các cách chọn 4 bạn từ 10 bạn của câu lạc bộ cờ, khi đó

$$n(\Omega) = C_{10}^{4} = 210.$$

Xét biến cố A: "Trong 4 bạn được chọn, có ít nhất một bạn biết chơi cờ tướng, ít nhất một bạn biết chơi cờ vua".

Khi đó biến cố đối của A là $\overline{A}$: "Bốn bạn được chọn chỉ chơi cờ vua hoặc chỉ chơi cờ tướng".

Xác suất của biến cố $\overline{A}$ là:

$$P(\overline{A}) = \frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \frac{C_4^4 + C_6^4}{210} = \frac{8}{105}.$$

Suy ra xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{8}{105} = \frac{97}{105}.$$

30. Xét các biến cố A: "Bạn An ném bóng trúng rổ";

B: "Bạn Bình ném bóng trúng rổ";

C: "Có ít nhất một bạn ném bóng vào rổ".

A và B là hai biến cố độc lập nên $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \,.\, \mathrm{P}(B)$.

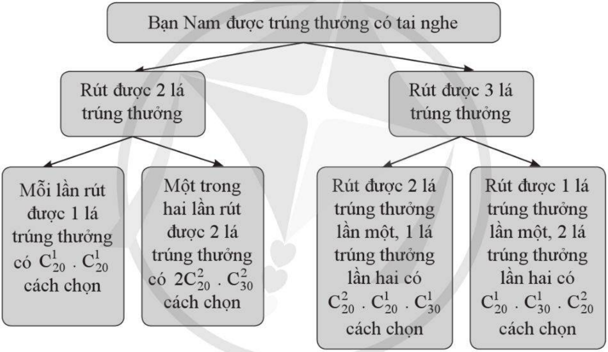
Khi đó, $\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(B) \,.\, \mathrm{P}(C)$

$= 0{,}6 + 0{,}9 - 0{,}6 \,.\, 0{,}9 = 0{,}96.$

31*. Số phần tử của không gian mẫu Ω là:

$$n(\Omega) = \mathrm{C}_{50}^2 \,.\, \mathrm{C}_{50}^2.$$

Sơ đồ hình cây biểu thị các khả năng thuận lợi cho biến cố A.



Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là:

$$n(A) = \mathrm{C}_{20}^1 \,.\, \mathrm{C}_{20}^1 + 2\mathrm{C}_{20}^2 \,.\, \mathrm{C}_{30}^2 + 2\mathrm{C}_{20}^2 \,.\, \mathrm{C}_{20}^1 \,.\, \mathrm{C}_{30}^1 = 393\ 700.$$

Xác suất của biến cố A là:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{393\ 700}{\mathrm{C}_{50}^2 \,.\, \mathrm{C}_{50}^2} \approx 0{,}3.$$

Chương
VI

HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

§1 PHÉP TÍNH LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phép tính luỹ thừa với số mũ nguyên

Cho số thực a khác 0 và số nguyên dương n. Ta đặt $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Chú ý

• 0^0 và 0^{-n} (n nguyên dương) không có nghĩa.

• Luỹ thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự của luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

2. Căn bậc n

a) Định nghĩa

Cho số thực a và số nguyên dương n ($n \geq 2$). Số b được gọi là *căn bậc n* của số a nếu $b^n = a$.

Nhận xét

• Với n lẻ và $a \in \mathbb{R}$: Có duy nhất một căn bậc n của a, kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$.

• Với n chẵn, ta xét ba trường hợp sau:

+) $a < 0$: Không tồn tại căn bậc n của a;

+) $a = 0$: Có một căn bậc n của a là số 0;

+) $a > 0$: Có hai căn bậc n của a là hai số đối nhau, giá trị dương kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$, còn giá trị âm kí hiệu là $-\sqrt[n]{a}$.

b) Tính chất

• $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ |a| & \text{nếu } n \text{ chẵn;} \end{cases}$

• $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$;

• $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$;

• $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$;   • $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

(Ở mỗi công thức trên, ta giả sử các biểu thức xuất hiện trong đó là có nghĩa).

3. Phép tính luỹ thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r = \dfrac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Luỹ thừa của a với số mũ r xác định bởi: $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Nhận xét

• $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $(a > 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$.

• Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ của số thực dương có đầy đủ các tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên.

4. Phép tính luỹ thừa với số mũ thực

a) Định nghĩa

Cho a là số thực dương, α là số vô tỉ, (r_n) là dãy số hữu tỉ và $\lim r_n = \alpha$. Giới hạn của dãy số (a^{r_n}) gọi là luỹ thừa của a với số mũ α, kí hiệu a^α, $a^\alpha = \lim a^{r_n}$.

b) Tính chất

• Cho a, b là những số thực dương; α, β là những số thực tuỳ ý. Khi đó, ta có:

$a^\alpha . a^\beta = a^{\alpha+\beta}$; $(ab)^\alpha = a^\alpha . b^\alpha$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha = \dfrac{a^\alpha}{b^\alpha}$;

$\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$; $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$;

• Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

• Cho $0 < a < b$, α là một số thực. Ta có:

$a^\alpha < b^\alpha \Leftrightarrow \alpha > 0$; $a^\alpha > b^\alpha \Leftrightarrow \alpha < 0$.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Tính giá trị của biểu thức chứa luỹ thừa

Ví dụ 1 Tính:

a) $\left(\dfrac{1}{256}\right)^{-0,75} + \left(\dfrac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}$;   b) $(4^{3+\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}) . 2^{-2\sqrt{3}}$.

Giải

a) $\left(\frac{1}{256}\right)^{-0,75}+\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}=\left(4^{-4}\right)^{-0,75}+\left(3^{-3}\right)^{-\frac{4}{3}}=4^3+3^4=145$.

b) $\left(4^{3+\sqrt{3}}-4^{\sqrt{3}-1}\right).2^{-2\sqrt{3}}=\left[2^{2(3+\sqrt{3})}-2^{2(\sqrt{3}-1)}\right].2^{-2\sqrt{3}}$

$=\left(2^{6+2\sqrt{3}}-2^{2\sqrt{3}-2}\right).2^{-2\sqrt{3}}=2^{6+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}}-2^{2\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}}=2^6-2^{-2}=\frac{255}{4}$.

Vấn đề 2. Rút gọn biểu thức chứa luỹ thừa

Ví dụ 2 Cho a, b là những số thực dương. Viết các biểu thức sau dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỉ:

a) $a^{\frac{1}{3}}.\sqrt{a}$; b) $b^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{b}$; c) $a^{\frac{4}{3}}:\sqrt[3]{a}$; d) $\sqrt[3]{b}:b^{\frac{1}{6}}$.

Giải

a) $a^{\frac{1}{3}}.\sqrt{a}=a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{6}}$.

b) $b^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{b}=b^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{6}}=b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=b$.

c) $a^{\frac{4}{3}}:\sqrt[3]{a}=a^{\frac{4}{3}}:a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}=a$.

d) $\sqrt[3]{b}:b^{\frac{1}{6}}=b^{\frac{1}{3}}:b^{\frac{1}{6}}=b^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}=b^{\frac{1}{6}}$.

Ví dụ 3 Rút gọn mỗi biểu thức sau:

a) $\dfrac{a^{\frac{7}{3}}-a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{1}{3}}}$ $(a>0,\ a\neq 1)$; b) $\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}$ $(a>0,\ b>0)$.

Giải

a) $\dfrac{a^{\frac{7}{3}}-a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}(a^2-1)}{a^{\frac{1}{3}}(a-1)}=a+1$. b) $\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}=\sqrt[6]{(a^2b)^6}=a^2b$.

Vấn đề 3. So sánh các luỹ thừa

Ví dụ 4 Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh các số:

a) $16^{\sqrt{3}}$ và $4^{3\sqrt{2}}$; b) $(0,2)^{\sqrt{16}}$ và $(0,2)^{\sqrt[3]{60}}$.

Giải

a) Ta có: $16^{\sqrt{3}} = 4^{2\sqrt{3}}$. Do $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$, $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$, $\sqrt{12} < \sqrt{18}$ và $4 > 1$ nên $4^{2\sqrt{3}} < 4^{3\sqrt{2}}$ hay $16^{\sqrt{3}} < 4^{3\sqrt{2}}$.

b) Ta có: $(0,2)^{\sqrt{16}} = (0,2)^4$. Do $4 = \sqrt[3]{64} > \sqrt[3]{60}$ và $0,2 < 1$ nên $(0,2)^4 < (0,2)^{\sqrt[3]{60}}$ hay $(0,2)^{\sqrt{16}} < (0,2)^{\sqrt[3]{60}}$.

Ví dụ 5 Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh các số:

a) 2^{300} và 3^{200};

b) $\left(\sqrt{5}\right)^{-\frac{2}{3}}$ và $\sqrt[3]{4}$.

Giải

a) Ta có: $2^{300} = \left(2^3\right)^{100} = 8^{100}$; $3^{200} = \left(3^2\right)^{100} = 9^{100}$.

Do $8 < 9$ và $100 > 0$ nên $8^{100} < 9^{100}$ hay $2^{300} < 3^{200}$.

b) Ta có: $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

Do $\sqrt{5} > 1 > \dfrac{1}{2}$ và $-\dfrac{2}{3} < 0$ nên $\left(\sqrt{5}\right)^{-\frac{2}{3}} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$ hay $\left(\sqrt{5}\right)^{-\frac{2}{3}} < \sqrt[3]{4}$.

Vấn đề 4. Ứng dụng

Ví dụ 6 Định luật thứ ba của Kepler về quỹ đạo chuyển động cho biết cách ước tính khoảng thời gian P (tính theo năm Trái Đất) mà một hành tinh cần để hoàn thành một quỹ đạo quay quanh Mặt Trời. Khoảng thời gian đó được xác định bởi hàm số $P = d^{\frac{3}{2}}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời tính theo đơn vị thiên văn AU (1 AU là khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, tức là 1 AU khoảng 93 000 000 dặm) (*Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson*). Hỏi Sao Hoả quay quanh Mặt Trời thì mất bao nhiêu năm Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn)? Biết khoảng cách từ Sao Hoả đến Mặt Trời là 1,52 AU.

Giải

Thời gian để Sao Hoả quay quanh Mặt Trời là:

$$P = d^{\frac{3}{2}} = 1,52^{\frac{3}{2}} \approx 1,874 \text{ (năm Trái Đất).}$$

C. BÀI TẬP

1. Điều kiện xác định của x^{-7} là:

A. $x \in \mathbb{R}$. **B.** $x \neq 0$. **C.** $x \geq 0$. **D.** $x > 0$.

2. Điều kiện xác định của $\sqrt[5]{x^3}$ là:

A. $x \in \mathbb{R}$. **B.** $x \neq 0$. **C.** $x \geq 0$. **D.** $x > 0$.

3. Điều kiện xác định của $\sqrt[8]{x^3}$ là:

A. $x \in \mathbb{R}$. **B.** $x \neq 0$. **C.** $x \geq 0$. **D.** $x > 0$.

4. Điều kiện xác định của $x^{\sqrt{2}}$ là:

A. $x \in \mathbb{R}$. **B.** $x \neq 0$. **C.** $x \geq 0$. **D.** $x > 0$.

5. Giá trị của biểu thức $P = 2^{1-\sqrt{2}} \cdot 2^{3+\sqrt{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}$ bằng:

A. 128. **B.** 64. **C.** 16. **D.** 32.

6. Nếu $a > 1$ thì:

A. $a^{-\sqrt{3}} > \dfrac{1}{a^{\sqrt{5}}}$. **B.** $a^{-\sqrt{3}} < \dfrac{1}{a^{\sqrt{5}}}$. **C.** $a^{-\sqrt{3}} \leq \dfrac{1}{a^{\sqrt{5}}}$. **D.** $a^{-\sqrt{3}} = \dfrac{1}{a^{\sqrt{5}}}$.

7. Nếu $(2-\sqrt{3})^{a-1} < 2+\sqrt{3}$ thì:

A. $a > 0$. **B.** $a > 1$. **C.** $a < 1$. **D.** $a < 0$.

8. Nếu $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{2}}$ thì:

A. $a > 1$. **B.** $a < 1$. **C.** $0 < a < 1$. **D.** $a > 0$.

9. Biểu thức $P = \sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}}$ với $x > 0$ được rút gọn bằng:

A. $x^{\frac{5}{3}}$. **B.** $x^{\frac{7}{6}}$. **C.** $x^{\frac{1}{3}}$. **D.** $x^{\frac{5}{6}}$.

10. Biểu thức $Q = a^{\sqrt{3}} \cdot \left(\dfrac{1}{a}\right)^{\sqrt{3}-1}$ với $a > 0$ được rút gọn bằng:

A. $\dfrac{1}{a}$. **B.** a^3. **C.** a. **D.** 1.

11. Viết các biểu thức sau về luỹ thừa cơ số a, biết:

a) $A = \sqrt[7]{3 \cdot \sqrt[5]{\dfrac{1}{3}}}$ với $a = 3$; b) $B = \dfrac{25\sqrt[3]{5}}{\sqrt{125}}$ với $a = \sqrt{5}$.

12. Không sử dụng máy tính cầm tay, so sánh hai số a và b, biết:

a) $a = (\sqrt{3}-1)^{\sqrt{2}}$ và $b = (\sqrt{3}-1)^{\sqrt{3}}$; b) $a = (\sqrt{2}-1)^{\pi}$ và $b = (\sqrt{2}+1)^{e}$;

c) $a = \dfrac{1}{3^{400}}$ và $b = \dfrac{1}{4^{300}}$;   d) $a = \dfrac{8}{\sqrt[4]{27}}$ và $b = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$.

13. Xác định các giá trị của số thực a thoả mãn:

a) $a^{\frac{1}{2}} > a^{\sqrt{3}}$;   b) $a^{-\frac{3}{2}} < a^{\frac{2}{3}}$;   c) $\left(\sqrt{2}\right)^{a} > \left(\sqrt{3}\right)^{a}$.

14. Cho $a > 0$, $b > 0$. Rút gọn mỗi biểu thức sau:

a) $A = \dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}$;   b) $B = \dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$.

15*. Cho x, y là các số thực dương và số thực a thoả mãn:

$a = \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2y^4}}$. Chứng minh rằng $a^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$.

16. Một chất phóng xạ có chu kì bán rã là 25 năm, tức là cứ sau 25 năm, khối lượng của chất phóng xạ đó giảm đi một nửa. Giả sử lúc đầu có 10 g chất phóng xạ đó. Viết công thức tính khối lượng của chất đó còn lại sau t năm và tính khối lượng của chất đó còn lại sau 120 năm (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn theo đơn vị gam).

§2 PHÉP TÍNH LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khái niệm lôgarit

a) Định nghĩa

Với $a > 0$, $a \neq 1$ và $b > 0$, ta có: $c = \log_a b \Leftrightarrow a^c = b$. Ngoài ra:

- Lôgarit thập phân của b là lôgarit cơ số 10 của số thực dương b:

$$c = \log b \Leftrightarrow 10^c = b;$$

- Lôgarit tự nhiên của b là lôgarit cơ số e của số thực dương b:

$$c = \ln b \Leftrightarrow e^c = b.$$

b) Tính chất

Với $a > 0$, $a \neq 1$ và $b > 0$, ta có:

$\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $\log_a a^c = c$; $a^{\log_a b} = b$.

2. Một số tính chất của phép tính lôgarit

Trong mục này, ta xét $a > 0$, $a \neq 1$ và $b > 0$.

a) Lôgarit của một tích, một thương

Với $m > 0$, $n > 0$, ta có:

- $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$;
- $\log_a\left(\dfrac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$.

Nhận xét: $\log_a\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\log_a b$.

b) Lôgarit của một luỹ thừa

Với mọi số thực α, ta có: $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$.

Nhận xét: Với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, ta có: $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n}\log_a b$.

c) Đổi cơ số của lôgarit

Với a, b là hai số thực dương khác 1 và c là số thực dương, ta có: $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$.

***Nhận xét*:** Với a, b là hai số thực dương khác 1, $c > 0$ và $\alpha \neq 0$, ta có những công thức sau:

- $\log_a b \,.\, \log_b c = \log_a c$;
- $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$;
- $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b$.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Thực hiện các phép tính lôgarit

Ví dụ 1 Tính:

a) $\log_{0,5} 0,25$; b) $8^{\log_2 5}$; c) $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{\log 81}$; d) $5^{\log_{25} 16}$.

Giải

a) $\log_{0,5} 0,25 = \log_{0,5} 0,5^2 = 2$.

b) $8^{\log_2 5} = \left(2^3\right)^{\log_2 5} = \left(2^{\log_2 5}\right)^3 = 5^3 = 125$.

c) $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{\log 81} = \left(10^{-1}\right)^{\log 81} = \left(10^{\log 81}\right)^{-1} = 81^{-1} = \dfrac{1}{81}$.

d) $5^{\log_{25} 16} = \left(25^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{25} 16} = \left(25^{\log_{25} 16}\right)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = 4$.

Ví dụ 2 Cho $\log_a b = 2$. Tính:

a) $\log_a\left(a^2 b^3\right)$; b) $\log_a \dfrac{a\sqrt{a}}{b\sqrt[3]{b}}$; c) $\log_a(2b) + \log_a\left(\dfrac{b^2}{2}\right)$.

Giải

a) $\log_a(a^2b^3) = \log_a a^2 + \log_a b^3 = 2 + 3\log_a b = 2 + 3\,.\,2 = 8$.

b) $\log_a \dfrac{a\sqrt{a}}{b\sqrt[3]{b}} = \log_a a^{\frac{3}{2}} - \log_a b^{\frac{4}{3}} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{4}{3}\log_a b = \dfrac{3}{2} - \dfrac{4}{3}\,.\,2 = -\dfrac{7}{6}$.

c) $\log_a(2b) + \log_a\left(\dfrac{b^2}{2}\right) = \log_a 2 + \log_a b + \log_a b^2 - \log_a 2 = 3\log_a b = 3\,.\,2 = 6$.

Vấn đề 2. Ứng dụng

Ví dụ 3 Trong nuôi trồng thuỷ sản, độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khỏe và sự phát triển của thuỷ sản. Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất là trong khoảng từ 7,8 đến 8,5. Phân tích nồng độ $[H^+]$ (mol L^{-1}) trong một đầm nuôi tôm sú, ta thu được $[H^+] = 8.10^{-8}$ (*Nguồn: https://nongnghiep.farmvina.com*). Hỏi độ pH của đầm đó có thích hợp cho tôm sú phát triển không? Biết pH = – log$[H^+]$.

Giải

Độ pH của đầm đó là: $\text{pH} = -\log[H^+] = -\log(8\,.\,10^{-8}) \approx 7,097$.

Do 7,097 < 7,2 nên đầm đó không thích hợp cho tôm sú phát triển.

C. BÀI TẬP

17. Cho $a > 0$, $a \neq 2$. Giá trị của $\log_{\frac{a}{2}}\left(\dfrac{a^2}{4}\right)$ bằng:

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** – 2.

18. Cho $a > 0$, $a \neq 1$. Giá trị của $\log_a \sqrt{a\sqrt{a}}$ bằng:

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{8}$.

19. Cho $a > 0$. Giá trị của $\log_2\left(\dfrac{8}{a}\right)$ bằng:

A. $3 - \log_2 a$. **B.** $4 - \log_2 a$. **C.** $\dfrac{3}{\log_2 a}$. **D.** $8 - \log_2 a$.

20. Nếu $\log_a b = 2$, $\log_a c = 3$ thì $\log_a(b^2c^3)$ bằng:

A. 108. **B.** 13. **C.** 31. **D.** 36.

21. Cho $a > 0$. Giá trị của $\ln(9a) - \ln(3a)$ bằng:

A. $\ln(6a)$. **B.** $\ln 6$. **C.** $\dfrac{\ln 9}{\ln 3}$. **D.** $\ln 3$.

22. Cho $a > 0$, $b > 0$. Mệnh đề đúng là:

A. $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right) = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b$. **B.** $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right) = 1 + \dfrac{1}{3}\log_2 a - \log_2 b$.

C. $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right) = 1 + 3\log_2 a + \log_2 b$. **D.** $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right) = 1 + \dfrac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b$.

23. Cho $a > 0$, $a \neq 1$ và $b > 0$. Mệnh đề đúng là:

A. $\log_{a^2}(ab) = \dfrac{1}{2}\log_a b$. **B.** $\log_{a^2}(ab) = 2 + 2\log_a b$.

C. $\log_{a^2}(ab) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\log_a b$. **D.** $\log_{a^2}(ab) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\log_a b$.

24. Nếu $\log_2 3 = a$ thì $\log_6 9$ bằng:

A. $\dfrac{a}{a+1}$. **B.** $\dfrac{a}{a+2}$. **C.** $\dfrac{2a}{a+2}$. **D.** $\dfrac{2a}{a+1}$.

25. Nếu $\log_a b = 5$ thì $\log_{a^2b}\left(ab^2\right)$ bằng:

A. $\dfrac{11}{7}$. **B.** 1. **C.** 4. **D.** $\dfrac{26}{7}$.

26. Cho $a > 0$, $b > 0$ thoả mãn $a^2 + b^2 = 7ab$. Khi đó, $\log(a + b)$ bằng:

A. $\log 9 + \dfrac{1}{2}(\log a + \log b)$. **B.** $\log 3 + \dfrac{1}{2}\log a \,.\, \log b$.

C. $\log 3 + \dfrac{1}{2}\log a + \log b$. **D.** $\log 3 + \dfrac{1}{2}(\log a + \log b)$.

27. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy tính:

a) $\log_{\sqrt{2}} 8$; b) $\log_3 \sqrt[3]{9}$; c) $9^{\log_3 12}$; d) $2^{\log_4 9}$.

28. Tính:

a) $A = \dfrac{25^{\log_5 6} + 49^{\log_7 8} - 3}{3^{1+\log_9 4} + 4^{2-\log_2 3} + 5^{\log_{125} 27}}$; b) $B = \dfrac{36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 3^{\log_9 36}}{\log_2\left(\log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}\right)}$;

c) $C = \log_{\frac{1}{4}}\left(\log_3 4 \,.\, \log_2 3\right)$; d) $D = \log_4 2 \,.\, \log_6 4 \,.\, \log_8 6$.

29. Cho $\log_a b = 4$. Tính:

a) $\log_a\left(a^{\frac{1}{2}}b^5\right)$;

b) $\log_a\left(\dfrac{a\sqrt{b}}{b\sqrt[3]{a}}\right)$;

c) $\log_{a^3b^2}\left(a^2b^3\right)$;

d) $\log_{a\sqrt[3]{b}}\left(\sqrt[4]{a\sqrt{b}}\right)$.

30. a) Cho $\log_2 3 = a$. Tính $\log_{18} 72$ theo a.

b*) Cho $\log 2 = a$. Tính $\log_{20} 50$ theo a.

31*. Cho $x > 0$, $y > 0$ thoả mãn: $x^2 + 4y^2 = 6xy$. Chứng minh rằng:

$$2\log(x+2y) = 1 + \log x + \log y.$$

32*. Cho a, b, c, x, y, z là các số thực dương khác 1 và $\log_x a$, $\log_y b$, $\log_z c$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

$$\log_b y = \frac{2\log_a x \,.\, \log_c z}{\log_a x + \log_c z}.$$

33. Để tính độ tuổi của mẫu vật bằng gỗ, người ta đo độ phóng xạ của ${}^{14}_{6}C$ có trong mẫu vật tại thời điểm t (năm) (so với thời điểm ban đầu $t = 0$), sau đó sử dụng công thức tính độ phóng xạ $H = H_0 e^{-\lambda t}$ (đơn vị là Becquerel, kí hiệu Bq) với H_0 là độ phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$); $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T}$ là hằng số phóng xạ, $T = 5\ 730$ (năm) (*Nguồn: Vật lí 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2014*). Khảo sát một mẫu gỗ cổ, các nhà khoa học đo được độ phóng xạ là 0,215 Bq. Biết độ phóng xạ của mẫu gỗ tươi cùng loại là 0,250 Bq. Xác định độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

§3 HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số mũ

Cho số thực a ($a > 0$, $a \neq 1$). Hàm số $y = a^x$ được gọi là *hàm số mũ cơ số a*.

Xét hai trường hợp:

$y = a^x$ $(a > 1)$

• Tập xác định: $\mathbb{R}$.

• Tập giá trị: $(0\ ;+\infty)$.

• Tính liên tục:

Hàm số $y = a^x$ $(a > 1)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

• Giới hạn đặc biệt:

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0,\ \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty.$$

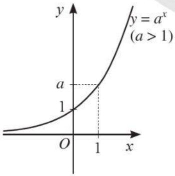
• Sự biến thiên:

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y = a^x$	0	1	$+\infty$

• Đồ thị:



$y = a^x$ $(0 < a < 1)$

• Tập xác định: $\mathbb{R}$.

• Tập giá trị: $(0\ ;+\infty)$.

• Tính liên tục:

Hàm số $y = a^x$ $(0 < a < 1)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

• Giới hạn đặc biệt:

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty,\ \lim_{x \to +\infty} a^x = 0.$$

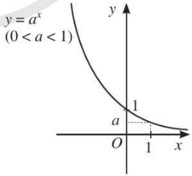
• Sự biến thiên:

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y = a^x$	$+\infty$	1	0

• Đồ thị:



2. Hàm số lôgarit

Cho số thực a ($a > 0$, $a \neq 1$). Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là *hàm số lôgarit* cơ số a.

Xét hai trường hợp:

$y = \log_a x$ $(a > 1)$

- Tập xác định: $(0 ; +\infty)$.
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$.
- Tính liên tục:

Hàm số $y = \log_a x$ $(a > 1)$ là hàm số liên tục trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

- Giới hạn đặc biệt:

$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$.

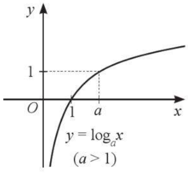
- Sự biến thiên:

Hàm số đồng biến trên $(0 ; +\infty)$.

- Bảng biến thiên:

x	0	1	$+\infty$
$y = \log_a x$	$-\infty$	0	$+\infty$

- Đồ thị:



$y = \log_a x$ $(0 < a < 1)$

- Tập xác định: $(0 ; +\infty)$.
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$.
- Tính liên tục:

Hàm số $y = \log_a x$ $(0 < a < 1)$ là hàm số liên tục trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

- Giới hạn đặc biệt:

$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$.

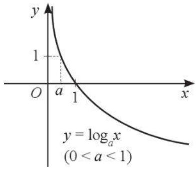
- Sự biến thiên:

Hàm số nghịch biến trên $(0 ; +\infty)$.

- Bảng biến thiên:

x	0	1	$+\infty$
$y = \log_a x$	$+\infty$	0	$-\infty$

- Đồ thị:



B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Tính chất và đồ thị của hàm số mũ, hàm số lôgarit

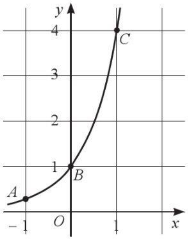
Ví dụ 1 Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

a) $y = 4^x$; b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

Giải

a) Vì hàm số $y = 4^x$ có cơ số $4 > 1$ nên ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y = 4^x$	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

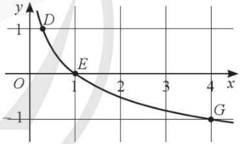


Hình 1

Đồ thị hàm số $y = 4^x$ là một đường cong liền nét đi qua các điểm $A\left(-1\,;\,\frac{1}{4}\right)$, $B(0\,;\,1)$, $C(1\,;\,4)$ (*Hình 1*).

b) Vì hàm số $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ có cơ số $\frac{1}{4} < 1$ nên ta có bảng biến thiên như sau:

x	0	1	$+\infty$
$y = \log_{\frac{1}{4}} x$	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-\infty$



Hình 2

Đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ là một đường cong liền nét đi qua các điểm $D\left(\frac{1}{4}\,;\,1\right)$, $E(1\,;\,0)$, $G(4\,;\,-1)$ (*Hình 2*).

Ví dụ 2 Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = 12^x$; b) $y = \log_5(2x-3)$.

Giải

a) Tập xác định của hàm số $y = 12^x$ là $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $y = \log_5(2x-3)$ xác định khi $2x - 3 > 0$ hay $x > \frac{3}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \log_5(2x-3)$ là $D = \left(\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right)$.

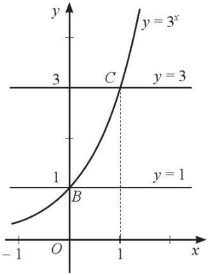
Ví dụ 3 Dựa vào đồ thị hàm số, cho biết với giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y = 3^x$:

a) Nằm ở phía trên đường thẳng $y = 3$;

b) Nằm ở phía dưới đường thẳng $y = 1$.

Giải

Quan sát *Hình 3*.



Hình 3

a) Đường thẳng $y = 3$ cắt đồ thị hàm số $y = 3^x$ tại điểm $C(1 ; 3)$.

Dựa vào *Hình 3*, ta thấy đồ thị hàm số $y = 3^x$ nằm ở phía trên đường thẳng $y = 3$ khi $x > 1$.

b) Đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = 3^x$ tại điểm $B(0 ; 1)$.

Dựa vào *Hình 3*, ta thấy đồ thị hàm số $y = 3^x$ nằm ở phía dưới đường thẳng $y = 1$ khi $x < 0$.

Vấn đề 2. Ứng dụng

Ví dụ 4 Các nhà tâm lí học sử dụng mô hình hàm số mũ để mô phỏng quá trình học tập của một học sinh như sau: $f(t) = c(1 - e^{-kt})$, trong đó c là tổng số đơn vị kiến thức học sinh phải học, k (kiến thức/ngày) là tốc độ tiếp thu của học sinh, t (ngày) là thời gian học và $f(t)$ là số *đơn vị* kiến thức học sinh đã học được.

(Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson).

Giả sử một em học sinh phải tiếp thu 25 đơn vị kiến thức mới. Biết rằng tốc độ tiếp thu của em học sinh là $k = 0,2$. Hỏi em học sinh sẽ học được (khoảng) bao nhiêu đơn vị kiến thức mới sau 2 ngày? Sau 8 ngày (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Giải

Sau 2 ngày, em học sinh đó học được số đơn vị kiến thức mới là:

$$f(2) = 25 \,.\, (1 - e^{-0,2\,.\,2}) \approx 8 \text{ (đơn vị kiến thức).}$$

Sau 8 ngày, em học sinh đó học được số đơn vị kiến thức mới là:

$$f(8) = 25 \,.\, (1 - e^{-0,2\,.\,8}) \approx 20 \text{ (đơn vị kiến thức).}$$

Ví dụ 5 Cô Yên gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất 6%/năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và cô Yên không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (đồng), cô Yên sử dụng công thức $y = \log_{1,06}\left(\dfrac{x}{10}\right)$. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì cô Yên có thể rút ra được số tiền 15 triệu đồng từ tài khoản tiết kiệm đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Giải

Cô Yên có thể rút ra được số tiền 15 triệu đồng sau ít nhất số năm là:

$$y = \log_{1,06}\left(\frac{15}{10}\right) \approx 7 \text{ (năm).}$$

C. BÀI TẬP

34. Tập xác định của hàm số $y = 0,2^{x-1}$ là:

A. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(1 ; +\infty)$. **D.** $(0 ; +\infty)$.

35. Tập xác định của hàm số $y = \log_3(2x+1)$ là:

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right)$. **C.** $\left(-\frac{1}{2} ; +\infty\right) \setminus \{0\}$. **D.** $\left(-\frac{1}{2} ; +\infty\right)$.

36. Tập xác định của hàm số $y = \log_5\left(x^2\right)$ là:

A. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(0 ; +\infty)$. **D.** $[0 ; +\infty)$.

37. Trong các hàm số sau, hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ là:

A. $y = \log_5 x$. **B.** $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$. **C.** $y = \ln\left(x^2 - 1\right)$. **D.** $y = 2^{\frac{1}{x}}$.

38. Trong các hàm số sau, hàm số nghịch biến trên tập xác định của nó là:

A. $y = e^x$. **B.** $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$. **C.** $y = \left(\sqrt{5}\right)^x$. **D.** $y = (1,2)^x$.

39. Trong các hàm số sau, hàm số đồng biến trên tập xác định của nó là:

A. $y = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$. **B.** $y = \log_{0,5} x$. **C.** $y = -\log x$. **D.** $y = \ln x$.

40. Giá trị thực của tham số a để hàm số $y = \log_{2a+3} x$ đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$ là:

A. $a > 1$. **B.** $a > -1$. **C.** $a > 0, a \neq 1$. **D.** $a > -1, a \neq 1$.

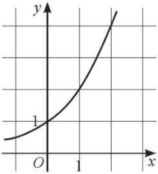
41. Cho $a^{\frac{7}{3}} < a^{\frac{7}{8}}$ và $\log_b\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right) < \log_b\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $a > 1$ và $b > 1$. **B.** $0 < a < 1$ và $0 < b < 1$.

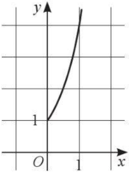
C. $0 < a < 1$ và $b > 1$. **D.** $a > 1$ và $0 < b < 1$.

42. Đường nào sau đây là đồ thị hàm số $y = 4^x$?

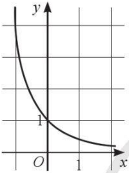
A.



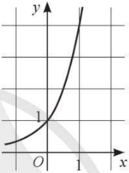
B.



C.



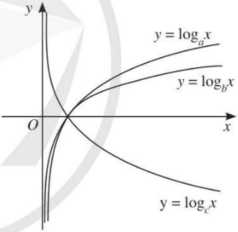
D.



43. Cho ba số thực dương a, b, c khác 1 và đồ thị của ba hàm số lôgarit $y = \log_a x$, $y = \log_b x$ và $y = \log_c x$ được cho bởi *Hình 4*. Kết luận nào sau đây là đúng đối với ba số a, b, c?

A. $c > b > a$. **B.** $a > b > c$.

C. $b > a > c$. **D.** $c > a > b$.



Hình 4

44. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

a) $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$; b) $y = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$;

c) $y = \log_{\sqrt{3}} x$; d) $y = -\log_2 x$.

45. Dựa vào đồ thị hàm số, cho biết với giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y = 0{,}5^x$:

a) Nằm ở phía trên đường thẳng $y = 1$;

b) Nằm ở phía trên đường thẳng $y = 4$;

c) Nằm ở phía dưới đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}$.

46. Dựa vào đồ thị hàm số, cho biết với giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y = \log_3 x$:

a) Nằm ở phía trên đường thẳng $y = 1$;

b) Nằm ở phía dưới trục hoành.

47. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-5}$; b) $y = 3^{\frac{x-1}{x+1}}$; c) $y = 1,5^{\sqrt{x+2}}$;

d) $y = \log_5(1-5x)$; e) $y = \log(4x^2 - 9)$; g) $y = \ln(x^2 - 4x + 4)$.

48. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \log_3\left(4x^2 - 4x + m\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

49. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hàm số $y = \log_{a^2-2a+1} x$ nghịch biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

50*. Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$.

a) Với a, b là hai số thực thoả mãn $a + b = 1$. Tính $f(a) + f(b)$.

b) Tính tổng: $S = f\left(\frac{1}{2\,023}\right) + f\left(\frac{2}{2\,023}\right) + \ldots + f\left(\frac{2\,022}{2\,023}\right)$.

51. Các nhà khoa học xác định được chu kì bán rã của ${}^{14}_{6}C$ là 5 730 năm, tức là sau 5 730 năm thì số nguyên tử ${}^{14}_{6}C$ giảm đi một nửa.

a) Gọi m_0 là khối lượng của ${}^{14}_{6}C$ tại thời điểm $t = 0$. Viết công thức tính khối lượng $m(t)$ của ${}^{14}_{6}C$ tại thời điểm t (năm).

b) Một cây còn sống có lượng ${}^{14}_{6}C$ trong cây được duy trì không đổi. Nhưng nếu cây chết thì lượng ${}^{14}_{6}C$ trong cây phân rã theo chu kì bán rã của nó. Các nhà khảo cổ đã tìm thấy một mẫu gỗ cổ được xác định chết cách đây 2 000 năm. Tính tỉ lệ phần trăm lượng ${}^{14}_{6}C$ còn lại trong mẫu gỗ cổ đó so với lúc còn sinh trưởng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

52. Mức cường độ âm L (dB) được tính bởi công thức $L = 10\log\frac{I}{10^{-12}}$, trong đó I (W/m^2) là cường độ âm. Tai người có thể nghe được âm có cường độ âm từ 10^{-12} W/m^2 đến 10 W/m^2. Tính mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được.

§4 PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình mũ

Phương trình mũ cơ bản ẩn x có dạng $a^x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$.

- Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $b > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.

Với $a > 0, a \neq 1$ thì

- $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$ với $b > 0$;
- $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

2. Phương trình lôgarit

Phương trình lôgarit cơ bản ẩn x có dạng $\log_a x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$. Phương trình có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

Với $a > 0, a \neq 1$ thì

- $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$.
- $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \text{ hoặc } g(x) > 0. \end{cases}$

3. Bất phương trình mũ

Xét bất phương trình mũ $a^x > b$ $(a > 0, a \neq 1)$.

- Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$;
- Nếu $b > 0$, $a > 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$;
- Nếu $b > 0$, $0 < a < 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.

Các bất phương trình mũ cơ bản khác được giải tương tự.

4. Bất phương trình lôgarit

Xét bất phương trình lôgarit $\log_a x > b$ $(a > 0, a \neq 1)$.

- Nếu $a > 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x > a^b$;
- Nếu $0 < a < 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $0 < x < a^b$.

Các bất phương trình lôgarit cơ bản khác được giải tương tự.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Giải phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit

Ví dụ 1 Giải mỗi phương trình sau:

a) $(0,3)^{x-3} = 1$;

b) $9^{x-2} = 243^{x+1}$;

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -3$;

d) $\log_5(3x-5) = \log_5(2x+1)$.

Giải

a) $(0,3)^{x-3} = 1 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$.

b) $9^{x-2} = 243^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2(x-2)} = 3^{5(x+1)} \Leftrightarrow 2(x-2) = 5(x+1) \Leftrightarrow x = -3$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -3$.

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -3 \Leftrightarrow x+1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow x+1 = 8 \Leftrightarrow x = 7$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 7$.

d) $\log_5(3x-5) = \log_5(2x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5 = 2x+1 \\ 3x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 6$.

Ví dụ 2 Giải mỗi bất phương trình sau:

a) $3^x > \frac{1}{243}$;

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-7} \le \frac{3}{2}$;

c) $4^{x+3} \ge 32^x$;

d) $\log(x-1) < 0$;

e) $\log_{\frac{1}{5}}(2x-1) \ge \log_{\frac{1}{5}}(x+3)$;

g) $\ln(x+3) \ge \ln(2x-8)$.

Giải

a) $3^x > \frac{1}{243} \Leftrightarrow 3^x > 3^{-5} \Leftrightarrow x > -5$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-5 ; +\infty)$.

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-7} \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-7} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow 3x-7 \ge -1 \Leftrightarrow x \ge 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[2 ; +\infty)$.

c) $4^{x+3} \ge 32^x \Leftrightarrow 2^{2(x+3)} \ge 2^{5x} \Leftrightarrow 2(x+3) \ge 5x \Leftrightarrow x \le 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty ; 2]$.

d) $\log(x-1) < 0 \Leftrightarrow \log(x-1) < \log 1 \Leftrightarrow 0 < x-1 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(1 ; 2)$.

e) $\log_{\frac{1}{5}}(2x-1) \geq \log_{\frac{1}{5}}(x+3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \leq x+3 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x > \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < x \leq 4.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,4\right]$.

g) $\ln(x+3) \geq \ln(2x-8) \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 2x-8 \\ 2x-8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 11 \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < x \leq 11.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(4\,;\,11]$.

Vấn đề 2. Ứng dụng

Ví dụ 3 Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất là 6%/năm. Để có được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 130 triệu đồng thì người đó phải gửi ít nhất bao nhiêu năm? Biết rằng lãi suất không thay đổi qua các năm và người đó không rút tiền ra trong suốt quá trình gửi.

Giải

Gọi x là số năm người đó gửi tiền trong ngân hàng.

Số tiền cả gốc và lãi người đó có được sau x năm được tính bởi công thức:

$$S = 100\,.\,1{,}06^x.$$

Để có được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 130 triệu đồng thì

$$100\,.\,1{,}06^x > 130 \Leftrightarrow 1{,}06^x > 1{,}3 \Leftrightarrow x > \log_{1{,}06} 1{,}3.\ \text{Suy ra } x > 4{,}503.$$

Do kì hạn gửi là 12 tháng nên để rút được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 130 triệu đồng thì người đó phải gửi ít nhất 5 năm.

Ví dụ 4 Độ pH của đất thích hợp cho trồng hoa hồng là từ 6,5 đến 7. Tính nồng độ của ion hydrogen $[H^+]$ của đất để thích hợp cho trồng hoa hồng.

Giải

Ta có: $6{,}5 < -\log[H^+] < 7 \Leftrightarrow -7 < \log[H^+] < -6{,}5 \Leftrightarrow 10^{-7} < [H^+] < 10^{-6{,}5}$.

Vậy nồng độ của ion hydrogen $[H^+]$ của đất trong khoảng $(10^{-7}\,;\,10^{-6{,}5})$ thì thích hợp để trồng hoa hồng.

C. BÀI TẬP

53. Nghiệm của phương trình $2^{x-1} = 8$ là:

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

54. Nghiệm của phương trình $2^x = 5$ là:

A. $x = \sqrt{5}$. **B.** $x = \frac{5}{2}$. **C.** $x = \log_2 5$. **D.** $x = \log_5 2$.

55. Nghiệm của phương trình $9^{2x+1} = 27^{x-3}$ là:

A. $x = -9$. **B.** $x = 11$. **C.** $x = 9$. **D.** $x = -11$.

56. Nghiệm của phương trình $\log_2(x-5) = 4$ là:

A. $x = 21$. **B.** $x = 9$. **C.** $x = 13$. **D.** $x = 7$.

57. Nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) = -2$ là:

A. $x = 2$. **B.** $x = 5$. **C.** $x = \frac{5}{2}$. **D.** $x = \frac{3}{2}$.

58. Số nghiệm của phương trình $\log\left(x^2 - 7x + 12\right) = \log(2x-8)$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

59. Nghiệm của bất phương trình $2^x < 5$ là:

A. $x > \log_2 5$. **B.** $x < \log_5 2$. **C.** $x < \log_2 5$. **D.** $x > \log_5 2$.

60. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,2}(x+1) > -3$ là:

A. $(-1\,;\,124)$. **B.** $(124\,;\,+\infty)$. **C.** $\left(-1\,;\,-\frac{26}{27}\right)$. **D.** $(-\infty\,;\,124)$.

61. Giải mỗi phương trình sau:

a) $3^{x-1} = 5$; b) $3^{x^2-4x+5} = 9$; c) $2^{2x+3} = 8\sqrt{2}$;

d) $8^{x-2} = 4^{1-2x}$; e) $2^{x^2-3x-2} = 0,25\,.\,16^{x-3}$; g) $2^{x^2-4x+4} = 3$.

62. Giải mỗi phương trình sau:

a) $\log_4(x-4) = -2$; b) $\log_3(x^2+2x) = 1$;

c) $\log_{25}(x^2-4) = \frac{1}{2}$; d) $\log_9\left[(2x-1)^2\right] = 2$;

e) $\log\left(x^2-2x\right) = \log(2x-3)$; g) $\log_2(x\ \ ) + \log_{\frac{1}{}}(2x+8) = 0$.

63. Giải mỗi bất phương trình sau:

a) $(0,2)^{2x+1} > 1$; b) $27^{2x} \le \frac{1}{9}$;

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5x+4} \geq 4$;

d) $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} < 125^{2x}$;

e) $\left(\sqrt{2}-1\right)^{3x-2} < \left(\sqrt{2}+1\right)^{4-x}$;

g) $(0,5)^{2x^2-x} > \left(\sqrt{2}\right)^{4x-12}$.

64. Giải mỗi bất phương trình sau:

a) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-6) < -3$;

b) $\log_3(x^2-2x+2) > 0$;

c) $\log_4(2x^2+3x) \geq \frac{1}{2}$;

d) $\log_{0,5}(x-1) \geq \log_{0,5}(5-2x)$;

e) $\log(x^2+1) \leq \log(x+3)$;

g) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-6x+8) + \log_5(x-4) > 0$.

65. Người ta nuôi cấy vi khuẩn Bacillus subtilis trong nồi lên men và thu được số liệu sau: Lúc ban đầu, số tế bào/1 ml dịch nuôi là $2 \cdot 10^2$. Sau 13 giờ, số tế bào/1 ml dịch nuôi là $3,33 \cdot 10^9$. Biết vi khuẩn Bacillus subtilis sinh trưởng trong điều kiện hoàn toàn tối ưu và sinh sản theo hình thức tự nhân đôi. Hỏi sau bao nhiêu phút, vi khuẩn Bacillus subtilis tự nhân đôi một lần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

66. Tốc độ của gió S (dặm/giờ) gần tâm của một cơn lốc xoáy được tính bởi công thức: $S = 93\log d + 65$, trong đó d (dặm) là quãng đường cơn lốc xoáy đó di chuyển được.

(Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage)

Tính quãng đường cơn lốc xoáy đã di chuyển được, biết tốc độ của gió ở gần tâm bằng 140 dặm/giờ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

67. Dân số thành phố Hà Nội năm 2022 khoảng 8,4 triệu người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm của Hà Nội không đổi và bằng $r = 1,04\%$. Biết rằng, sau t năm dân số Hà Nội (tính từ mốc năm 2022) ước tính theo công thức: $S = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là dân số năm lấy làm mốc. Hỏi từ năm nào trở đi, dân số của Hà Nội vượt quá 10 triệu người?

68. Mức cường độ âm L (dB) được tính bởi công thức $L = 10\log\frac{I}{10^{-12}}$, trong đó I (W/m^2) là cường độ âm. Để đảm bảo sức khoẻ cho công nhân, mức cường độ âm trong một nhà máy phải giữ sao cho không vượt quá 85 dB. Hỏi cường độ âm của nhà máy đó phải thoả mãn điều kiện nào để đảm bảo sức khoẻ cho công nhân?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

69. Nếu $a^{\frac{3}{4}} < a^{\frac{4}{5}}$ thì:

A. $a < 1$. **B.** $0 < a < 1$. **C.** $a < 0$. **D.** $a > 1$.

70. Nếu $2^x = 3$ thì 4^x bằng:

A. 6. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 8.

71. Nếu $\sqrt[6]{x} = a$ thì $\sqrt{x}$ bằng:

A. $\sqrt[3]{a}$. **B.** $\sqrt[4]{a}$. **C.** a^3. **D.** a^4.

72. Rút gọn biểu thức $\sqrt{\sqrt[3]{x}}$ với $x \geq 0$ nhận được:

A. $\sqrt[6]{x}$. **B.** $x^{\frac{1}{5}}$. **C.** $\sqrt[5]{x}$. **D.** $x^{\frac{1}{6}}$.

73. Tập xác định của hàm số $y = \left(\sqrt{2}\right)^{x+2}$ là:

A. $(-2 ; +\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(-2 ; +\infty) \setminus \{-1\}$. **D.** $\mathbb{Z}$.

74. Tập xác định của hàm số $y = \log_2(x-1)$ là:

A. $[1 ; +\infty)$. **B.** $(1 ; +\infty) \setminus \{2\}$. **C.** $(1 ; +\infty)$. **D.** $(0 ; +\infty)$.

75. Giá trị của $\log_2 9 - \log_2 36$ bằng:

A. 2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** -2.

76. Nếu $\log_4 \sqrt{a} = 16$ thì $\log_4 a$ bằng:

A. 32. **B.** 256. **C.** 8. **D.** 4.

77. Nếu $\log 2 = a$ thì $\log 4\,000$ bằng:

A. $2a + 3$. **B.** $3a^2$. **C.** $\frac{1}{2}a + 3$. **D.** $a^2 + 3$.

78. Nếu $\log_{12} 6 = a$ thì $\log_2 6$ bằng:

A. $\frac{a}{1+a}$. **B.** $\frac{2a}{1-a}$. **C.** $\frac{a}{1-a}$. **D.** $\frac{2a}{1+a}$.

79. Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y = \left(\dfrac{e}{\pi}\right)^x$. **B.** $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$. **C.** $y = \log_{0,3} x$. **D.** $y = -\log_2 x$.

80. Nghiệm của phương trình $3^{x-1} = 1$ là:

A. $x = 1$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = -1$.

81. Nghiệm của phương trình $0,5^x = \left(\sqrt{2}\right)^{x+3}$ là:

A. $x = 3$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = -3$. **D.** $x = -1$.

82. Nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$ là:

A. $x = -\dfrac{1}{9}$. **B.** $x = \dfrac{1}{9}$. **C.** $x = 9$. **D.** $x = -9$.

83. Nghiệm của phương trình $\log_5(2x-3) - \log_{\frac{1}{5}}(2x-3) = 0$ là:

A. $x = \dfrac{3}{2}$. **B.** $x = 8$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 1$.

84. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{\sqrt{x}} > 1$ là:

A. $(0 ; +\infty)$. **B.** $[0 ; +\infty)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

85. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x-1) < 3$ là:

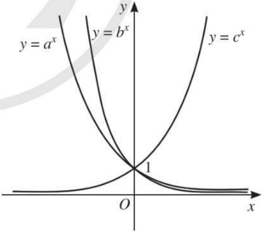
A. $(-\infty ; 3)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{3} ; 3\right)$.

C. $\left(-\infty ; \dfrac{10}{3}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{3} ; \dfrac{10}{3}\right)$.

86. Cho ba số thực dương a, b, c khác 1 và đồ thị của ba hàm số mũ $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ được cho bởi *Hình 5*. Kết luận nào sau đây là đúng đối với ba số a, b, c?

A. $c < a < b$. **B.** $c < b < a$.

C. $a < b < c$. **D.** $b < a < c$.



Hình 5

87. Cho a là số thực dương. Viết các biểu thức sau về luỹ thừa cơ số a:

a) $a^{\sqrt{3}} \cdot \left(\dfrac{1}{a}\right)^{\sqrt{3}-1}$; b) $\left(a^{\sqrt{5}}\right)^{2\sqrt{5}}$;

c) $\left(\frac{1}{a}\right)^{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{a^{4\sqrt{2}}}$;   d) $a^{\pi} \cdot \sqrt[3]{a^3 : a^{6\pi}}$.

88. Cho x, y là các số thực dương khác 1. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \frac{x^{3\sqrt{3}} - 1}{x^{\sqrt{3}} - 1} - \frac{x^{2\sqrt{3}} + x^{\sqrt{3}}}{x^{\sqrt{3}}}$;   b) $B = \frac{x^{2\sqrt{2}} - y^{2\sqrt{3}}}{\left(x^{\sqrt{2}} - y^{\sqrt{3}}\right)^2} + 1$.

89. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2^x - 3}{2^x + 3}$;   b) $y = \sqrt{3^x - 1}$;

c) $y = \frac{\log_2 x}{3 - \log_2 x}$;   d) $y = \frac{1}{\sqrt{\log_{0,2} x + 2}}$.

90. Cho $b > 0$ và $b^{\frac{2}{3}} = a$. Viết b^2; $\sqrt{a} \cdot b$; $\frac{a^6}{b^3}$ theo luỹ thừa cơ số a.

91. Cho $a > 0$, $a \neq 1$ và $a^{\frac{1}{2}} = b$. Tính:

a) $\log_a b$;   b) $\log_a\left(a^3b^2\right)$;

c) $\log_{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{b}\right)$;   d) $\log_{ab}\left(a\sqrt{b}\right)$.

92. Giải mỗi phương trình sau:

a) $0,5^{2x^2 + x - 1} = \frac{1}{4}$;   b) $2^{x^2 - 6x - \frac{5}{2}} = 16\sqrt{2}$;

c) $27^{x^2 - 4x + 4} = 9^{x^2 - 4}$;   d) $0,05^{x - 3} = \left(2\sqrt{5}\right)^x$;

e) $\log_3 3(x - 2) = -1$;   g) $\log_5\left(x^2 + 1\right) + \log_{0,2}\left(4 - 5x - x^2\right) = 0$.

93. Giải mỗi bất phương trình sau:

a) $2^{5x + 1} > 0,25$;   b) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x-1} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{x+2}$;

c) $\log_{16}(3x + 4) < -\frac{1}{4}$;   d) $\log_{0,2}\left(x^2 - 6x + 9\right) \geq \log_{0,2}(x - 3)$.

94. Số lượng của một loài vi khuẩn sau x giờ được tính bởi công thức $f(x) = Ae^{rx}$, trong đó, A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$). Biết số vi khuẩn ban đầu là 1 000 con và sau 10 giờ tăng trưởng thành 5 000 con.

a) Tính tỉ lệ tăng trưởng của vi khuẩn.

b) Hỏi sau khoảng bao nhiêu giờ thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 10 lần so với số lượng vi khuẩn ban đầu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

95. Với nước biển có nồng độ muối 30%, nhiệt độ T (°C) của nước biển được tính bởi công thức $T = 7,9\ln(1,0245 - d) + 61,84$, ở đó d (g/cm^3) là khối lượng riêng của nước biển.

(Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage)

Biết vùng biển khơi mặt ở một khu vực có nồng độ muối 30% và nhiệt độ là 8 °C. Tính khối lượng riêng của nước biển ở vùng biển đó (làm tròn kết quả đến hàng phần chục nghìn).

96. Cường độ của một trận động đất, kí hiệu là M (độ Richter), được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, ở đó A là biên độ rung chấn tối đa đo được bằng địa chấn kế và A_0 là biên độ chuẩn (hằng số phụ thuộc vào từng khu vực)

(Nguồn: https://vi.wikipedia.org/wiki/Độ_Richter)

Vào hồi 12 giờ 14 phút trưa ngày 27/07/2020, tại khu vực huyện Mộc Châu, Sơn La xảy ra trận động đất thứ nhất với cường độ 5,3 độ Richter. Trong vòng 20 tiếng đồng hồ, Sơn La đã xảy ra liên tiếp 7 trận động đất. Đến 8 giờ 26 phút sáng 28/07/2020, trận động đất thứ bảy xảy ra với cường độ 4 độ Richter.

(Nguồn: https://plo.vn/7-tran-dong-dat-lien-tiep-o-son-la-trong-vong-20-tieng-dong-ho-post585443.html)

Biết rằng biên độ chuẩn được dùng cho cả tỉnh Sơn La. Hỏi biên độ rung chấn tối đa của trận động đất thứ nhất gấp khoảng mấy lần biên độ rung chấn tối đa của trận động đất thứ bảy (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

§1 PHÉP TÍNH LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

1. B. **2.** A. **3.** C. **4.** D. **5.** D. **6.** A. **7.** A. **8.** C. **9.** B. **10.** C.

11. a) $A = a^{\frac{4}{35}}$. b) $B = a^{\frac{5}{3}}$.

12. a) Do $\sqrt{3} - 1 < 1$ và $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ nên $a > b$.

b) Ta có: $a = (\sqrt{2} - 1)^{\pi} = (\sqrt{2} + 1)^{-\pi}$. Do $\sqrt{2} + 1 > 1$ và $-\pi < e$ nên $a < b$.

c) Ta có: $a = \dfrac{1}{3^{400}} = \left(\dfrac{1}{81}\right)^{100}$, $b = \dfrac{1}{4^{300}} = \left(\dfrac{1}{64}\right)^{100}$ mà $\dfrac{1}{81} < \dfrac{1}{64}$ nên $a < b$.

d) Ta có: $a = \dfrac{8}{\sqrt[4]{27}} = \left(\dfrac{16}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$ và $\dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1 < \dfrac{16}{3}$ nên $a > b$.

13. a) $0 < a < 1$. b) $a > 1$. c) $a < 0$.

14. a) $A = ab$. b) $B = \sqrt[3]{ab}$.

15*. Ta có: $a = \sqrt{\sqrt[3]{x^6} + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{\sqrt[3]{y^6} + \sqrt[3]{x^2 y^4}}$

$$= \sqrt{\sqrt[3]{x^4}\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}\right)} + \sqrt{\sqrt[3]{y^4}\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}\right)}$$

$$= \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}\right)\sqrt{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}} = \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Suy ra $a^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$.

16. Công thức tính khối lượng của chất phóng xạ đó còn lại sau t năm là:

$$m = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{25}} \text{ (g)}.$$

Khối lượng của chất đó còn lại sau 120 năm là:

$$m = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{120}{25}} \approx 0,359 \text{ (g)}.$$

§2 PHÉP TÍNH LÔGARIT

17. B. **18.** C. **19.** A. **20.** B. **21.** D. **22.** A. **23.** D. **24.** D. **25.** A. **26.** D.

27. a) 6. b) $\frac{2}{3}$. c) 144. d) 3.

28. a) 9. b) – 8. c) $-\frac{1}{2}$. d) $\frac{1}{3}$.

29. a) $\frac{41}{2}$. b) $-\frac{4}{3}$.

c) $\log_{a^3b^2}\left(a^2b^3\right) = \frac{\log_a\left(a^2b^3\right)}{\log_a\left(a^3b^2\right)} = \frac{2+3\log_a b}{3+2\log_a b} = \frac{2+3\,.\,4}{3+2\,.\,4} = \frac{14}{11}$.

d) $\frac{9}{28}$.

30. a) $\log_{18} 72 = \frac{2a+3}{2a+1}$.

b*) Ta có: $1 = \log 10 = \log 2 + \log 5$ nên $\log 5 = 1 - \log 2 = 1 - a$. Khi đó:

$$\log_{20} 50 = \frac{\log 50}{\log 20} = \frac{1+\log 5}{1+\log 2} = \frac{2-a}{a+1}.$$

31*. Ta có: $x^2 + 4y^2 = 6xy \Leftrightarrow (x+2y)^2 = 10xy$.

Suy ra $2\log(x+2y) = \log(x+2y)^2 = \log(10xy) = 1 + \log x + \log y$.

32*. Vì $\log_x a,\ \log_y b,\ \log_z c$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên ta có:

$$2\log_y b = \log_x a + \log_z c \Leftrightarrow 2\log_y b = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_c z}$$

$$\Leftrightarrow 2\log_y b = \frac{\log_a x + \log_c z}{\log_a x\,.\,\log_c z} \Leftrightarrow \log_b y = \frac{2\log_a x\,.\,\log_c z}{\log_a x + \log_c z}.$$

33. Gọi t là độ tuổi của mẫu gỗ cổ.

Ta có: $H = H_o e^{-\lambda t}$ với $H = 0{,}215$; $H_0 = 0{,}250$; $\lambda = \frac{\ln 2}{5\,730}$.

Từ đó, $\lambda t = \ln\frac{H_0}{H} = \ln\frac{0{,}250}{0{,}215} \approx 0{,}1508$. Vậy $t \approx \frac{0{,}1508}{\lambda} \approx 1247$.

Vậy độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó xấp xỉ 1247 năm.

§3 HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LÔGARIT

34. B. **35.** D. **36.** A. **37.** B. **38.** B. **39.** D. **40.** B. **41.** B. **42.** D. **43.** C.

44. Học sinh tự làm.

45. a) $x < 0$. b) $x < -2$. c) $x > 1$.

46. a) $x > 3$. b) $0 < x < 1$.

47. a) $\mathbb{R}$. b) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. c) $[-2 ; +\infty)$. d) $\left(-\infty ; \frac{1}{5}\right)$.

e) $\left(-\infty ; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2} ; +\infty\right)$. g) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

48. Hàm số $y = \log_3(4x^2 - 4x + m)$ xác định trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$4x^2 - 4x + m > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow m > 1.$$

49. Hàm số $y = \log_{a^2-2a+1} x$ nghịch biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$0 < a^2 - 2a + 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < a < 2 \text{ và } a \neq 1.$$

50*. a) Ta có:

$$f(a) + f(b) = \frac{9^a}{9^a + 3} + \frac{9^b}{9^b + 3} = \frac{9^a}{9^a + 3} + \frac{9^{1-a}}{9^{1-a} + 3} = \frac{9^a}{9^a + 3} + \frac{3}{3 + 9^a} = 1.$$

b) Ta thấy: $\frac{1}{2\,023} + \frac{2\,022}{2\,023} = 1,\ \frac{2}{2\,023} + \frac{2\,021}{2\,023} = 1,\ \ldots.$

Theo câu a, ta có: $f\left(\frac{1}{2\,023}\right) + f\left(\frac{2\,022}{2\,023}\right) = 1,\ f\left(\frac{2}{2\,023}\right) + f\left(\frac{2\,021}{2\,023}\right) = 1,\ \ldots$

Suy ra $S = f\left(\frac{1}{2\,023}\right) + f\left(\frac{2}{2\,023}\right) + \ldots + f\left(\frac{2\,022}{2\,023}\right)$

$$= \left[f\left(\frac{1}{2\,023}\right) + f\left(\frac{2\,022}{2\,023}\right)\right] + \left[f\left(\frac{2}{2\,023}\right) + f\left(\frac{2\,021}{2\,023}\right)\right] + \ldots$$

$$+ \left[f\left(\frac{1\,011}{2\,023}\right) + f\left(\frac{1\,012}{2\,023}\right)\right]$$

$$= \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{1\,011 \text{ số } 1} = 1\,011.$$

51. a) $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\,730}}$.

b) Tỉ lệ phần trăm lượng ${}^{14}_{6}C$ còn lại trong mẫu gỗ cổ đó so với lúc còn sinh trưởng là:

$$\frac{m(2\,000)}{m_0} \cdot 100\% = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2\,000}{5\,730}} \cdot 100\% \approx 78,5\%.$$

52. Mức cường độ âm tai người có thể nghe được từ 0 dB đến 130 dB.

§4 PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

53. B. **54.** C. **55.** D. **56.** A. **57.** B. **58.** B. **59.** C. **60.** A.

61. a) $x = 1 + \log_3 5$. b) $x = 1$ hoặc $x = 3$. c) $x = \frac{1}{4}$.
d) $x = \frac{8}{7}$. e) $x = 3$ hoặc $x = 4$. g) $x = 2 \pm \sqrt{\log_2 3}$.

62. a) $x = \frac{65}{16}$. b) $x = -3$ hoặc $x = 1$. c) $x = -3$ hoặc $x = 3$.
d) $x = -4$ hoặc $x = 5$. e) $x = 3$. g) $x = -2$ hoặc $x = 4$.

63. a) $x < -\frac{1}{2}$. b) $x \le -\frac{1}{3}$. c) $2 \le x \le 3$.
d) $x > -\frac{1}{4}$. e) $x > -1$. g) $-2 < x < \frac{3}{2}$.

64. a) $x > 7$. b) $x \ne 1$. c) $x \le -2$ hoặc $x \ge \frac{1}{2}$.
d) $1 < x \le 2$. e) $-1 \le x \le 2$. g) Vô nghiệm.

65. Gọi T (phút) là thời gian để vi khuẩn Bacillus subtilis tự nhân đôi một lần. Theo giả thiết, ta có:

$$3,33 \cdot 10^9 = 2 \cdot 10^2 \cdot 2^{\frac{13\,.\,60}{T}} \Leftrightarrow \frac{13\,.\,60}{T} = \log_2\left(1,665 \cdot 10^7\right).$$

Suy ra $T \approx 33$ phút.

66. 6,4 dặm.

67. Ta có: $8,4e^{0,0104t} > 10 \Leftrightarrow t > \frac{\ln 10 - \ln 8,4}{0,0104}$. Suy ra $t > 16,764$. Vậy sau khoảng 17 năm tính từ mốc năm 2022, tức là từ năm 2039 thì dân số Hà Nội vượt quá 10 triệu người.

68. Cường độ âm của nhà máy đó không vượt quá $10^{-3,5}$ (W/m^2).

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

69. D. **70.** B. **71.** C. **72.** A. **73.** B. **74.** C. **75.** D. **76.** A. **77.** A.

78. C. **79.** B. **80.** A. **81.** D. **82.** C. **83.** C. **84.** A. **85.** B. **86.** D.

87. a) a. b) a^{10}. c) $a^{-\sqrt{2}}$. d) $a^{1-\pi}$.

88. a) $A = \dfrac{\left(x^{\sqrt{3}}\right)^3 - 1}{x^{\sqrt{3}} - 1} - \dfrac{x^{\sqrt{3}}\left(x^{\sqrt{3}} + 1\right)}{x^{\sqrt{3}}} = x^{2\sqrt{3}} + x^{\sqrt{3}} + 1 - \left(x^{\sqrt{3}} + 1\right) = x^{2\sqrt{3}}$.

b) $B = \dfrac{2x^{\sqrt{2}}}{x^{\sqrt{2}} - y^{\sqrt{3}}}$.

89. a) $\mathbb{R}$. b) $[0\,;+\infty)$. c) $(0\,;+\infty)\setminus\{8\}$. d) $(0\,;25)$.

90. $b^2 = \left(b^{\frac{2}{3}}\right)^3 = a^3$; $\sqrt{a}\,.\,b = a^{\frac{1}{2}}\,.\,a^{\frac{3}{2}} = a^2$; $\dfrac{a^6}{b^3} = \dfrac{a^6}{\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^3} = a^{\frac{3}{2}}$.

91. a) $\log_a b = \dfrac{1}{2}$. b) $\log_a\left(a^3b^2\right) = 4$.

c) $\log_{\sqrt{a}}\left(\dfrac{a}{b}\right) = 1$. d) $\log_{ab}\left(a\sqrt{b}\right) = \dfrac{5}{6}$.

92. a) $x = -\dfrac{3}{2}$ hoặc $x = 1$. b) $x = -1$ hoặc $x = 7$. c) $x = 2$ hoặc $x = 10$.

d) $0,05^{x-3} = \left(2\sqrt{5}\right)^x \Leftrightarrow 20^{3-x} = (2\sqrt{5})^x \Leftrightarrow (2\sqrt{5})^{6-2x} = (2\sqrt{5})^x$

$\Leftrightarrow 6 - 2x = x \Leftrightarrow x = 2$.

e) $x = \dfrac{19}{9}$.

g) $\log_5\left(x^2+1\right) + \log_{0,2}\left(4 - 5x - x^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \log_5\left(x^2+1\right) - \log_5\left(4 - 5x - x^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \log_5\left(x^2+1\right) = \log_5\left(4 - 5x - x^2\right)$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 4 - 5x - x^2 \Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = \dfrac{1}{2}$.

93. a) $x > -\dfrac{3}{5}$.

b) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x-1} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{x+2} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{-2x+2} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{x+2} \Leftrightarrow -2x+2 \le x+2 \Leftrightarrow x \ge 0.$

c) $-\frac{4}{3} < x < -\frac{7}{6}$.

d) $\log_{0,2}(x^2-6x+9) \ge \log_{0,2}(x-3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+9>0 \\ x^2-6x+9 \le x-3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2>0 \\ x^2-7x+12 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 3 \\ 3 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x \le 4.$

94. a) Theo giả thiết, ta có: $1\,000e^{10r} = 5\,000 \Leftrightarrow e^{10r} = 5$.

Suy ra tỉ lệ tăng trưởng của vi khuẩn là: $r = \frac{\ln 5}{10}$.

b) Khi số lượng vi khuẩn tăng gấp 10 lần so với số lượng vi khuẩn ban đầu thì ta có phương trình:

$$Ae^{rx} = 10A \Leftrightarrow e^{rx} = 10 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 10}{r}.$$

Thay $r = \frac{\ln 5}{10}$ ta có: $x = \frac{\ln 10}{\frac{\ln 5}{10}} \approx 14$.

Vậy sau khoảng 14 giờ thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 10 lần.

95. Theo giả thiết, với $T = 8$ ta có phương trình:

$$7,9\ln(1,0245-d)+61,84 = 8 \Leftrightarrow \ln(1,0245-d) = \frac{-2\,692}{395}$$

$$\Leftrightarrow 1,0245-d = e^{\frac{-2\,692}{395}} \Leftrightarrow d = 1,0245 - e^{\frac{-2\,692}{395}}.$$

Suy ra khối lượng riêng của nước biển ở vùng biển đó là: $d \approx 1,0234$ g/cm³.

96. Cường độ trận động đất thứ nhất là: $M_1 = \log A_1 - \log A_0 = 5,3$.

Cường độ trận động đất thứ bảy là: $M_7 = \log A_7 - \log A_0 = 4$.

Do đó, ta có:

$$M_1 - M_7 = \log A_1 - \log A_7 = 1,3 \Leftrightarrow \log\frac{A_1}{A_7} = 1,3 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_7} = 10^{1,3}.$$

Suy ra $\frac{A_1}{A_7} \approx 20$.

Vậy biên độ rung chấn tối đa của trận động đất thứ nhất gấp khoảng 20 lần biên độ rung chấn tối đa của trận động đất thứ bảy.

Chương VII

ĐẠO HÀM

§1 ĐỊNH NGHĨA ĐẠO HÀM. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\ ;\ b)$ và điểm $x_0 \in (a\ ;\ b)$.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là *đạo hàm của hàm số* $y = f(x)$ tại x_0 và được kí hiệu là $f'(x_0)$ hoặc y'_{x_0}.

• Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a\ ;\ b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng đó.

2. Cách tính đạo hàm bằng định nghĩa

Để tính đạo hàm $f'(x_0)$ của hàm số $y = f(x)$ tại x_0, ta lần lượt thực hiện ba bước sau:

Bước 1. Xét $\Delta x = x - x_0$ là số gia của biến số tại điểm x_0.

Tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Bước 2. Rút gọn tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Bước 3. Tính $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Kết luận: Nếu $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = a$ thì $f'(x_0) = a$.

3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

• Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số đó tại điểm $M_0(x_0\ ;\ f(x_0))$.

• Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0\ ;\ f(x_0))$ là $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Tính đạo hàm của hàm số bằng định nghĩa

Ví dụ 1 Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 3x^3 - 1$ tại điểm $x_0 = 1$ bằng định nghĩa.

Giải

Xét Δx là số gia của biến số tại điểm $x_0 = 1$.

Ta có: $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = 3(1 + \Delta x)^3 - 1 - (3 \cdot 1^3 - 1) = 9\Delta x + 9(\Delta x)^2 + 3(\Delta x)^3$.

Suy ra: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{9\Delta x + 9(\Delta x)^2 + 3(\Delta x)^3}{\Delta x} = 9 + 9\Delta x + 3(\Delta x)^2$.

Ta thấy: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} [9 + 9\Delta x + 3(\Delta x)^2] = 9$.

Vậy $f'(1) = 9$.

Vấn đề 2. Xác định tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm

Ví dụ 2 Cho hàm số $y = f(x) = x^2$ có đồ thị (P).

a) Xác định hệ số góc k của tiếp tuyến của đồ thị (P) tại điểm có hoành độ bằng $\dfrac{1}{2}$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (P) tại điểm có hoành độ bằng $\dfrac{1}{2}$.

Giải

a) Xét Δx là số gia của biến số tại điểm $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

Ta có: $\Delta y = f\left(\dfrac{1}{2} + \Delta x\right) - f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2} + \Delta x\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \Delta x + (\Delta x)^2$.

Suy ra: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 1 + \Delta x$.

Ta thấy: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x) = 1$. Suy ra $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$. Vậy $k = f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$.

b) Ta có: $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (P) tại điểm có hoành độ bằng $\dfrac{1}{2}$ là:

$$y = 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \text{ hay } y = x - \frac{1}{4}.$$

Ví dụ 3 Cho hàm số $y = f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ có đồ thị (C).

a) Xác định hệ số góc k của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 3.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 3.

Giải

a) Gọi M là điểm có tung độ bằng 3 nằm trên (C). Khi đó, hoành độ điểm M bằng 1.

Xét Δx là số gia của biến số tại điểm $x_0 = 1$.

Ta có: $\Delta y = f(1+\Delta x) - f(1) = \left(2 + \frac{1}{1+\Delta x}\right) - \left(2 + \frac{1}{1}\right) = \frac{1}{1+\Delta x} - 1 = \frac{-\Delta x}{1+\Delta x}$.

Suy ra: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{1+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{-1}{1+\Delta x}$. Ta thấy: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{1+\Delta x} = -1$.

Suy ra $f'(1) = -1$. Vậy $k = f'(1) = -1$.

b) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(1 ; 3)$ là:

$$y = -1(x-1) + 3 \text{ hay } y = -x + 4.$$

Vấn đề 3. Ứng dụng

Ví dụ 4 Giả sử chi phí C (USD) để sản xuất Q máy vô tuyến là

$$C(Q) = Q^2 + 80Q + 3\,500.$$

a) Tính $\frac{\Delta C}{\Delta Q}$.

b) Ta gọi chi phí biên là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ Q sản phẩm lên $Q + 1$ sản phẩm. Giả sử chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(Q)$. Tìm hàm chi phí biên.

c) Tìm $C'(90)$ và giải thích ý nghĩa kết quả tìm được.

Giải

a) Xét ΔQ là số gia của biến số tại điểm Q. Ta có:

$$\Delta C = C(Q + \Delta Q) - C(Q) = (Q + \Delta Q)^2 + 80(Q + \Delta Q) + 3\,500 - Q^2 - 80Q - 3\,500$$
$$= 2Q \,.\, \Delta Q + (\Delta Q)^2 + 80\Delta Q.$$

Suy ra: $\frac{\Delta C}{\Delta Q} = \frac{2Q \,.\, \Delta Q + (\Delta Q)^2 + 80\Delta Q}{\Delta Q} = 2Q + \Delta Q + 80$.

b) Ta thấy: $\lim\limits_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q} = \lim\limits_{\Delta Q \to 0} (2Q + \Delta Q + 80) = 2Q + 80$.

Vậy hàm chi phí biên là: $C'(Q) = 2Q + 80$.

c) Ta có: $C'(90) = 2 \,.\, 90 + 80 = 260$. Dựa vào kết quả đó, ta thấy chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ 90 sản phẩm lên 91 sản phẩm là 260 USD.

C. BÀI TẬP

1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) + f(x_0)}{x + x_0}$.

B. $f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

C. $f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x + x_0}$.

D. $f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) + f(x_0)}{x - x_0}$.

2. Điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một hàm số của thời gian t, $Q = Q(t)$. Cường độ trung bình trong khoảng thời gian $|t - t_0|$ được xác định bởi công thức $\dfrac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$. Cường độ tức thời tại thời điểm t_0 là:

A. $\dfrac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$.

B. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$.

C. $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{Q'(t) - Q'(t_0)}{t - t_0}$.

D. $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$.

3. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0\,; f(x_0))$ là:

A. $f(x_0)$. **B.** $f'(x_0)$. **C.** x_0. **D.** $-f'(x_0)$.

4. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0\,; f(x_0))$ *là:*

A. $y = f(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

B. $y = f'(x_0)(x + x_0) + f(x_0)$.

C. $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

D. $y = f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$.

5. Vận tốc tức thời của chuyển động $s = f(t)$ tại thời điểm t_0 là:

A. $f'(t_0)$. **B.** $f(t_0) - f'(t_0)$. **C.** $f(t_0)$. **D.** $-f'(t_0)$.

6. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau bằng định nghĩa:

a) $f(x) = x + 2$; b) $g(x) = 4x^2 - 1$; c) $h(x) = \dfrac{1}{x - 1}$.

7*. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x - 2|$ không có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$, nhưng có đạo hàm tại mọi điểm $x \neq 2$.

8. Cho hàm số $f(x) = x^3$ có đồ thị (C).

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng -1.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 8.

9. Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động là $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8$ m/s^2.

a) Tìm vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 3$ (s).

b) Tìm thời điểm mà vận tốc tức thời của vật tại thời điểm đó bằng 39,2 (m/s).

§2 CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương

Giả sử $f = f(x)$, $g = g(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Ta có:

$$(f+g)' = f' + g'; \qquad (f-g)' = f' - g';$$

$$(fg)' = f'g + fg'; \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}\ (g = g(x) \neq 0).$$

2. Đạo hàm của hàm hợp

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

3. Bảng đạo hàm của một số hàm số sơ cấp cơ bản và hàm hợp

Đạo hàm của hàm số sơ cấp cơ bản thường gặp	**Đạo hàm của hàm hợp (ở đây $u = u(x)$)**
$(x^n)' = n \,.\, x^{n-1}$	$(u^n)' = n \,.\, u^{n-1} \,.\, u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

Đạo hàm của hàm số sơ cấp cơ bản thường gặp	Đạo hàm của hàm hợp (ở đây $u = u(x)$)
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \,.\, \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \,.\, \sin u$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u' \,.\, e^u$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = u' \,.\, a^u \ln a$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Tính đạo hàm bằng công thức và vận dụng

Ví dụ 1 Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm $x_0 = 1$:

a) $f(x) = x^6$; b) $g(x) = (2x - 1)(x + 1)$; c) $h(x) = \dfrac{1-x}{3x+5}$;

d) $k(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; e) $m(x) = 2^{3x+1}$; g) $n(x) = \log_3(2x + 1)$.

Giải

a) Ta có: $f'(x) = 6x^5$.

Đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm $x_0 = 1$ là: $f'(1) = 6 \,.\, 1^5 = 6$.

b) Ta có: $g'(x) = (2x-1)'(x+1) + (2x-1)(x+1)' = 2(x+1) + (2x-1) = 4x+1.$

(Ta có thể tính $g'(x) = [(2x-1)(x+1)]' = (2x^2 + x - 1)' = 4x + 1$).

Đạo hàm của hàm số $g(x)$ tại điểm $x_0 = 1$ là: $g'(1) = 4 \,.\, 1 + 1 = 5.$

c) Ta có:

$$h'(x) = \frac{(1-x)'(3x+5) - (1-x)(3x+5)'}{(3x+5)^2} = \frac{(-1)(3x+5) - 3(1-x)}{(3x+5)^2} = \frac{-8}{(3x+5)^2}.$$

Đạo hàm của hàm số $h(x)$ tại điểm $x_0 = 1$ là: $h'(1) = \dfrac{-8}{(3 \,.\, 1+5)^2} = \dfrac{-1}{8}.$

d) Ta có: $k'(x) = -\dfrac{(\sqrt{x})'}{x} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}.$

Đạo hàm của hàm số $k(x)$ tại điểm $x_0 = 1$ là: $k'(1) = -\dfrac{1}{2 \,.\, 1 \,.\, \sqrt{1}} = \dfrac{-1}{2}.$

e) Ta có: $m'(x) = (3x+1)' \,.\, 2^{3x+1} \ln 2 = 3\ln 2 \,.\, 2^{3x+1}.$

Đạo hàm của hàm số $m(x)$ tại điểm $x_0 = 1$ là: $m'(1) = 3\ln 2 \,.\, 2^{3 \,.\, 1+1} = 48 \ln 2.$

g) Ta có: $n'(x) = \dfrac{(2x+1)'}{(2x+1)\ln 3} = \dfrac{2}{(2x+1)\ln 3}.$

Đạo hàm của hàm số $n(x)$ tại điểm $x_0 = 1$ là: $n'(1) = \dfrac{2}{(2 \,.\, 1+1)\ln 3} = \dfrac{2}{3\ln 3}.$

Ví dụ 2 Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

a) $f(x) = 2\sin x$;　　　b) $g(x) = \cot\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Giải

a) Ta có: $f'(x) = 2(\sin x)' = 2\cos x.$

Đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$ là: $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.$

b) Ta có: $g'(x) = -\dfrac{\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)'}{\sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{-1}{\sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}.$

Đạo hàm của hàm số $g(x)$ tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$ là: $g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{-1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4}\right)} = -1.$

Ví dụ 3 Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$. Giải bất phương trình $f'(x) < 0$.

Giải

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Khi đó, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình trên là $(-1 ; 1)$.

Ví dụ 4 Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc tập xác định, hàm số $g(x)$ được xác định bởi $g(x) = -3 - 2f(x)$. Biết $f'(5) = 1$. Tính $g'(5)$.

Giải

Ta có: $g'(x) = (-3)' - (2f(x))' = 0 - 2 \,.\, f'(x) = -2f'(x)$.

Suy ra $g'(5) = -2f'(5) = (-2) \,.\, 1 = -2$.

Ví dụ 5 Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc tập xác định và $f'(5) = 1$. Tính đạo hàm của hàm số $g(x) = f(1 + 2x)$ tại $x = 2$.

Giải

Ta có: $g'(x) = (1 + 2x)' \,.\, f'(1 + 2x) = 2f'(1 + 2x)$.

Suy ra $g'(2) = 2f'(5) = 2 \,.\, 1 = 2$.

Vấn đề 2. Ứng dụng hình học của đạo hàm

Ví dụ 6 Viết phương trình tiếp tuyến của parabol (P): $y = x^2 + 2x + 1$ tại giao điểm của nó với trục tung.

Giải

Gọi $A(0 ; y_0)$ là giao điểm của (P) và trục tung, suy ra $y_0 = y(0) = 1$.

Ta có: $y' = 2x + 2$, do đó $y'(0) = 2$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 2(x - 0) + 1$ hay $y = 2x + 1$.

Ví dụ 7 Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$ có đồ thị (C), viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng -5.

Giải

Gọi $A(x_0 ; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y'(x_0) = -5 \Leftrightarrow \dfrac{-5}{(x_0 - 2)^2} = -5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = 3. \end{array}\right.$

• Với $x_0 = 1$ ta được $y_0 = -3$, phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -5x + 2$.

• Với $x_0 = 3$ ta được $y_0 = 7$, phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -5x + 22$.

Ví dụ 8 Cho hàm số $y = x^3 + 2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x - 1$.

Giải

Gọi $M(x_0 ; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y'(x) = 3x^2$.

Do tiếp tuyến cần tìm vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x - 1$ nên ta có:

$$y'(x_0) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow y'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 3x_0^2 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = 1. \end{array}\right.$$

Từ đó, ta có: $y'(x_0) = 3$.

• Với $x_0 = -1$ ta được $y_0 = 1$, phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 3x + 4$.

• Với $x_0 = 1$ ta được $y_0 = 3$, phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 3x$.

Vấn đề 3. Ứng dụng thực tiễn của đạo hàm

Ví dụ 9 Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 4t + 1$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 3$ (s).

Giải

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t (s) là: $v(t) = s'(t) = t^2 - 4t + 4$.

Vậy vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 3$ (s) là:

$$v(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 4 = 1 \text{ (m/s)}.$$

Ví dụ 10 Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 6\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng centimét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}$ (s).

Giải

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t (s) là: $v(t) = s'(t) = 18\cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Vậy vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}$ (s) là:

$$v\left(\frac{\pi}{6}\right) = 18\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = -9\sqrt{2} \text{ (cm/s)}.$$

Ví dụ 11 Một viên đạn được bắn lên cao theo phương thẳng đứng có phương trình chuyển động $s(t) = 2 + 196t - 4,9t^2$, trong đó $t \geq 0$, t (s) là thời gian chuyển động, s (m) là độ cao so với mặt đất.

a) Sau bao lâu kể từ khi bắn thì viên đạn đạt được độ cao 1 962 m?

b) Tính vận tốc tức thời của viên đạn khi viên đạn đạt được độ cao 1 962 m.

c) Tại thời điểm viên đạn đạt vận tốc tức thời bằng 98 m/s thì viên đạn đang ở độ cao bao nhiêu mét so với mặt đất?

Giải

a) Khi viên đạn đạt được độ cao 1 962 m, ta có phương trình:

$$1\,962 = 2 + 196t - 4,9t^2 \Leftrightarrow t = 20.$$

Vậy sau 20 s kể từ lúc bắn thì viên đạn đạt được độ cao 1 962 m.

b) Vận tốc tức thời của viên đạn tại thời điểm t là: $v(t) = s'(t) = 196 - 9,8t$.

Viên đạn đạt được độ cao 1 962 m vào thời điểm $t = 20$ (s) kể từ lúc bắn, khi đó vận tốc tức thời của viên đạn là: $v(20) = 196 - 9,8 \,.\, 20 = 0$ (m/s).

c) Viên đạn có vận tốc tức thời bằng 98 m/s thì ta có phương trình:

$$v(t) = 196 - 9,8t = 98 \Leftrightarrow t = 10.$$

Khi đó viên đạn đang ở độ cao là: $s(10) = 2 + 196 \,.\, 10 - 4,9 \,.\, 10^2 = 1\,472$ (m).

Ví dụ 12 Năm 2001, dân số Việt Nam khoảng 78 690 000 người. Nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm luôn là 1,7% thì ước tính số dân Việt Nam sau x năm kể từ năm 2001 được tính theo hàm số sau: $f(x) = 7,869e^{0,017x}$ (chục triệu người). Tốc độ gia tăng dân số (chục triệu người/năm) sau x năm kể từ năm 2001 được xác định bởi hàm số $f'(x)$.

a) Tìm hàm số thể hiện tốc độ gia tăng dân số sau x năm kể từ năm 2001.

b) Tính tốc độ gia tăng dân số Việt Nam theo đơn vị chục triệu người/năm vào năm 2023 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười), nêu ý nghĩa của kết quả đó.

Giải

a) Ta có:

$$f'(x) = 7,869 \,.\, (0,017x)' \,.\, e^{0,017x} = 7,869 \,.\, 0,017 \,.\, e^{0,017x} = 0,133773e^{0,017x}.$$

Vậy hàm số thể hiện tốc độ gia tăng dân số sau x năm kể từ năm 2001 là:

$$f'(x) = 0,133773e^{0,017x}.$$

b) Ta có: $x = 2023 - 2001 = 22$.

Tốc độ gia tăng dân số Việt Nam vào năm 2023 là:

$$f'(22) = 0,133773e^{0,017 \,.\, 22} \approx 0,2 \text{ (chục triệu người/năm).}$$

Theo kết quả trên thì dân số nước ta tăng thêm khoảng 2 triệu người trong năm 2023.

Ví dụ 13 Trong thuyết động học phân tử chất khí, với một khối khí lí tưởng, các đại lượng áp suất p (Pa), thể tích V (m^3), nhiệt độ T (K), số mol n (mol) liên hệ với nhau theo phương trình: $pV = nRT$, trong đó $R = 8,31$ (J/mol.K) là hằng số.

(Nguồn: James Stewart, Calculus)

Một bóng thám không chứa 8 mol khí hydrogen ở trạng thái lí tưởng có áp suất không đổi $p = 10^5$ Pa. Tính tốc độ thay đổi thể tích theo nhiệt độ của khối khí trong bóng thám không.

Giải

Thay $p = 10^5$, $n = 8$, $R = 8,31$ vào phương trình trên ta có:

$$10^5V = 8 \,.\, 8,31T \Leftrightarrow V = 6,648 \,.\, 10^{-4}T.$$

Khi đó $V'(T) = 6,648 \,.\, 10^{-4}$. Vậy tốc độ thay đổi thể tích của khối khí lúc có nhiệt độ T là $6,648 \,.\, 10^{-4}$ (m^3/K).

C. BÀI TẬP

10. Cho $f = f(x)$, $g = g(x)$ có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $(fg)' = fg'$.

B. $(fg)' = f'g'$.

C. $(fg)' = f'g - fg'$.

D. $(fg)' = f'g + fg'$.

11. Cho $f = f(x)$, $g = g(x)$ có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định và $g = g(x) \neq 0$, $g' = g'(x) \neq 0$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'}{g'}$.

B. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

C. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'}{g^2}$.

D. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g + fg'}{g^2}$.

12. Cho hàm số $f(x) = \cos 3x$. Khi đó, $f'(x)$ bằng:

A. $\sin 3x$. **B.** $-\sin 3x$. **C.** $-3\sin 3x$. **D.** $3\sin 3x$.

13. Cho hàm số $f(x) = \sin(x^2)$. Khi đó, $f'(x)$ bằng:

A. $2x\cos(x^2)$. **B.** $\cos(x^2)$. **C.** $x^2\cos(x^2)$. **D.** $2x\cos(2x)$.

14. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$. Khi đó, $f'(x)$ bằng:

A. $-\dfrac{1}{(2x+3)^2}$. **B.** $-\dfrac{2}{(2x+3)^2}$. **C.** $\dfrac{2}{(2x+3)^2}$. **D.** $\dfrac{1}{(2x+3)^2}$.

15. Cho hàm số $f(x) = e^{2x}$. Khi đó, $f'(x)$ bằng:

A. e^{2x}. **B.** $2e^{x}$. **C.** $2xe^{2x}$. **D.** $2e^{2x}$.

16. Cho hàm số $f(x) = \ln(3x)$. Khi đó, $f'(x)$ bằng:

A. $\dfrac{1}{3x}$. **B.** $\dfrac{1}{x}$. **C.** $\dfrac{3}{x}$. **D.** $-\dfrac{1}{x}$.

17. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm $x_0 = 2$:

a) $f(x) = e^{x^2+2x}$; b) $g(x) = \dfrac{3^x}{2^x}$;

c) $h(x) = 2^x \cdot 3^{x+2}$; d) $k(x) = \log_3(x^2 - x)$.

18. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $f(x) = 2\cos(\sqrt{x})$; b) $g(x) = \tan(x^2)$;

c) $h(x) = \cos^2(3x) - \sin^2(3x)$; d) $k(x) = \sin^2 x + e^x \cdot \sqrt{x}$.

19. Cho hàm số $f(x) = 2^{3x-6}$. Giải phương trình $f'(x) = 3\ln 2$.

20. Giải bất phương trình $f'(x) < 0$, biết:

a) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$; b) $f(x) = -\log_5(x+1)$.

21. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc tập xác định, hàm số $g(x)$ được xác định bởi $g(x) = [f(x)]^2 + 2xf(x)$. Biết $f'(0) = f(0) = 1$. Tính $g'(0)$.

22. Cho hàm số $y = x^2 + 3x$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có:

a) Hoành độ bằng -1; b) Tung độ bằng 4.

23. Cho hàm số $y = \dfrac{x-3}{x+2}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến d của đồ thị (C) trong mỗi trường hợp sau:

a) d song song với đường thẳng $y = 5x - 2$;

b) d vuông góc với đường thẳng $y = -20x + 1$.

24. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = \dfrac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ (s).

25. Một mạch dao động điện từ LC có lượng điện tích dịch chuyển qua tiết diện thẳng của dây xác định bởi hàm số $Q(t) = 10^{-5}\sin\left(2\,000t + \dfrac{\pi}{3}\right)$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, Q tính bằng Coulomb. Tính cường độ dòng điện tức thời I (A) trong mạch tại thời điểm $t = \dfrac{\pi}{1\,500}$ (s), biết $I(t) = Q'(t)$.

26. Năm 2010, dân số ở một tỉnh D là 1 038 229 người. Tính đến năm 2015, dân số của tỉnh đó là 1 153 600 người. Cho biết dân số của tỉnh D được ước tính theo công thức $S(N) = Ae^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm được làm tròn đến hàng phần nghìn). Tốc độ gia tăng dân số (người/năm) vào thời điểm sau N năm kể từ năm 2010 được xác định bởi hàm số $S'(N)$. Tính tốc độ gia tăng dân số của tỉnh D vào năm 2023 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị người/năm), biết tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi.

27. Một tài xế đang lái xe ô tô, ngay khi phát hiện có vật cản phía trước đã phanh gấp lại nhưng vẫn xảy ra va chạm, chiếc ô tô để lại vết trượt dài 20,4 m (được tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi xảy ra va chạm). Trong quá trình đạp phanh, ô tô chuyển động theo phương trình $s(t) = 20t - \dfrac{5}{2}t^2$, trong đó s (m) là độ dài quãng đường đi được sau khi phanh, t (s) là thời gian tính từ lúc bắt đầu phanh ($0 \le t \le 4$).

a) Tính vận tốc tức thời của ô tô ngay khi đạp phanh. Hãy cho biết xe ô tô trên có chạy quá tốc độ hay không, biết tốc độ giới hạn cho phép là 70 km/h.

b) Tính vận tốc tức thời của ô tô ngay khi xảy ra va chạm?

28. Trong kinh tế học, xét mô hình doanh thu y (đồng) được tính theo số sản phẩm sản xuất ra x (chiếc) theo công thức $y = f(x)$.

Xét giá trị ban đầu $x = x_0$. Đặt $Mf(x_0) = f(x_0 + 1) - f(x_0)$ và gọi giá trị đó là giá trị y-cận biên của x tại $x = x_0$. Giá trị $Mf(x_0)$ phản ánh lượng doanh thu tăng thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm tại mốc sản phẩm x_0.

Xem hàm doanh thu $y = f(x)$ như là hàm biến số thực x.

Khi đó $Mf(x_0) = f(x_0 + 1) - f(x_0) \approx f'(x_0)$. Như vậy, đạo hàm $f'(x_0)$ cho chúng ta biết (xấp xỉ) lượng doanh thu tăng thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm tại mốc sản phẩm x_0.

Tính doanh thu tăng thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm nếu hàm doanh thu là $y = 10x - \frac{x^2}{100}$ tại mốc sản phẩm $x_0 = 10\,000$.

§3 ĐẠO HÀM CẤP HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x)$ tại mọi điểm $x \in (a\,;\,b)$. Nếu hàm số $y' = f'(x)$ tiếp tục có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' tại x là *đạo hàm cấp hai* của hàm số $y = f(x)$ tại x, kí hiệu là y'' hoặc $f''(x)$.

2. Ý nghĩa cơ học

Đạo hàm cấp hai $s''(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động $s = s(t)$ tại thời điểm t.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số

Ví dụ 1 Cho hàm số $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.

b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm $x_0 = 0$, $x_0 = 1$.

Giải

a) Ta có: $f'(x) = 2x + 2$ và $f''(x) = (2x + 2)' = 2$.

b) Vì $f''(x) = 2$ nên $f''(0) = f''(1) = 2$.

Ví dụ 2 Cho hàm số $g(x) = \cos x$.

a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.

b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Giải

a) Ta có: $g'(x) = -\sin x$, $g''(x) = (-\sin x)' = -\cos x$.

b) Vì $g''(x) = -\cos x$ nên $g''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 3 Cho hàm số $h(x) = \ln x, x > 0$.

a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.

b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại $x_0 = \sqrt{2}$.

Giải

a) Ta có: $h'(x) = \frac{1}{x}$, $h''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

b) Vì $h''(x) = -\frac{1}{x^2}$ nên $h''(\sqrt{2}) = -\frac{1}{(\sqrt{2})^2} = -\frac{1}{2}$.

Ví dụ 4 Cho hàm số $k(x) = \sin x \,.\, \cos x$.

a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.

b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

Giải

a) Ta có: $k(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$, suy ra $k'(x) = \cos 2x$, $k''(x) = (\cos 2x)' = -2\sin 2x$.

b) Vì $k''(x) = -2\sin 2x$ nên $k''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\left(2\,.\,\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

Ví dụ 5 Cho hàm số $f(x) = x^2 - 4x$. Giải phương trình $f'(x) = f''(x)$.

Giải

Ta có: $f'(x) = 2x - 4$, $f''(x) = 2$.

Khi đó, ta có phương trình

$$f'(x) = f''(x) \Leftrightarrow 2x - 4 = 2 \Leftrightarrow x = 3.$$

Vấn đề 2. Ứng dụng

_Ví dụ 6_ Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t+4$, trong đó $t>0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=3$ (s).

Giải

Ta có: $s'(t)=t^2-6t+5$.

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t (s) là:

$$s''(t)=2t-6.$$

Vậy gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=3$ (s) là:

$$s''(3)=2\,.\,3-6=0\ (\text{m/s}^2).$$

_Ví dụ 7_ Một chất điểm có phương trình chuyển động $s(t)=6\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$, trong đó $t>0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng centimét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=\frac{\pi}{6}$ (s).

Giải

Ta có: $s'(t)=18\cos\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$.

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t (s) là: $s''(t)=-54\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$.

Vậy gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=\frac{\pi}{6}$ (s) là:

$$s''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-54\sin\left(3\,.\,\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=-27\sqrt{2}\ (\text{cm/s}^2).$$

C. BÀI TẬP

29. Gia tốc tức thời của chuyển động $s=f(t)$ tại thời điểm t_0 là:

A. $f(t_0)$. **B.** $f''(t_0)$. **C.** $f'(t_0)$. **D.** $-f'(t_0)$.

30. Cho hàm số $f(x)=e^{-x}$. Khi đó $f''(x)$ bằng:

A. e^{-x}. **B.** $-e^{-x}$. **C.** $-e^{x}$. **D.** e^{x}.

31. Cho hàm số $f(x)=\ln(3x)$. Khi đó $f''(x)$ bằng:

A. $-\frac{1}{9x^2}$. **B.** $-\frac{1}{x^2}$. **C.** $\frac{3}{x^2}$. **D.** $-\frac{3}{x^2}$.

32. Cho hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$. Khi đó $f''(1)$ bằng:

A. 1. **B.** – 2. **C.** 2. **D.** – 1.

33. Tìm đạo hàm cấp hai của mỗi hàm số sau:

a) $f(x)=\frac{1}{3x+5}$; b) $g(x)=2^{x+3x^2}$.

34. Cho hàm số $f(x)=\sin x\ .\ \cos x\ .\ \cos 2x$.

a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.

b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại $x_0=\frac{\pi}{6}$.

35. Cho hàm số $f(x)=x^3+4x^2+5$. Giải bất phương trình $f'(x)-f''(x)\geq 0$.

36. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t+2$, trong đó $t>0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm:

a) Tại thời điểm $t=5$ (s).

b) Tại thời điểm mà vận tốc tức thời của chất điểm bằng – 1 m/s.

37. Một chất điểm có phương trình chuyển động $s(t)=3\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$, trong đó $t>0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng centimét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=\frac{\pi}{2}$ (s).

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

38. Cho $f=f(x)$, $g=g(x)$, $h=h(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Khi đó, $(fg+h)'$ bằng:

A. $f'g'+h'$. **B.** $f'g'h'$. **C.** $f'g+fg'+h'$. **D.** $f'gh'+fg'h$.

39. Cho hàm số $f(x)=\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$. Khi đó, $f'(x)$ bằng:

A. $\frac{1}{2}\cos x$. **B.** $-\frac{1}{2}\cos x$. **C.** $-\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$. **D.** $\cos x$.

40. Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{ax+b}$. Khi đó, $f'(x)$ bằng:

A. $-\dfrac{1}{(ax+b)^2}$. **B.** $\dfrac{1}{(ax+b)^2}$. **C.** $\dfrac{a}{(ax+b)^2}$. **D.** $-\dfrac{a}{(ax+b)^2}$.

41. Cho hàm số $f(x)=\sin ax$. Khi đó, $f'(x)$ bằng:

A. $\cos ax$. **B.** $-\cos ax$. **C.** $a\cos ax$. **D.** $a\cos x$.

42. Cho hàm số $f(x)=\cot ax$. Khi đó, $f'(x)$ bằng:

A. $-\dfrac{a}{\sin^2 ax}$. **B.** $\dfrac{a}{\sin^2 ax}$. **C.** $\dfrac{1}{\sin^2 ax}$. **D.** $-\dfrac{1}{\sin^2 ax}$.

43. Cho hàm số $f(x)=\log_a(bx)$. Khi đó, $f'(x)$ bằng:

A. $\dfrac{1}{bx}$. **B.** $\dfrac{1}{ax}$. **C.** $\dfrac{1}{x\ln a}$. **D.** $\dfrac{1}{x\ln b}$.

44. Cho hàm số $f(x)=e^{ax}$. Khi đó, $f''(x)$ bằng:

A. e^{ax}. **B.** a^2e^{ax}. **C.** a^2e^{x}. **D.** e^{2ax}.

45. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)=x^4$ tại điểm $M(2\,;16)$ bằng:

A. 48. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 32.

46. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $y=(2x^2+1)^3$;

b) $y=\sin 3x\cos 2x-\sin 2x\cos 3x$;

c) $y=\dfrac{\tan x+\tan 2x}{1-\tan x\tan 2x}$;

d) $y=\dfrac{e^{3x+1}}{2^{x-1}}$.

47. Cho hàm số $f(x)=\ln(4x+3)$. Tính $f'(x)$ và $f''(x)$ tại điểm $x_0=1$.

48. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-12x$.

a) Tìm $f'(x)$ và giải bất phương trình $f'(x)>0$.

b) Tìm $f''(x)$ và giải phương trình $f''(x)=0$.

49. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+4}$ có đồ thị (C).

a) Tìm đạo hàm của hàm số.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng – 3.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 1.

50. Một chất điểm có phương trình chuyển động $s(t) = 2\sin\left(6t + \frac{\pi}{4}\right)$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng centimét. Tính vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4}$ (s).

51. Kính viễn vọng không gian Hubble được triển khai vào ngày 24 tháng 4 năm 1990, bởi tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong nhiệm vụ này từ khi xuất phát tại $t = 0$ (s) cho đến khi tên lửa đẩy nhiên liệu rắn bị loại bỏ ở $t = 126$ (s) được xác định theo phương trình sau:

$$v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083 \text{ (ft/s)}.$$

(Nguồn: James Stewart, Calculus)

Tính gia tốc tức thời của tàu con thoi trên tại thời điểm $t = 100$ (s) (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

52. Sau khi uống đồ uống có cồn, nồng độ cồn trong máu tăng lên rồi giảm dần được xác định bằng hàm số $C(t) = 1,35te^{-2,802t}$, trong đó C (mg/ml) là nồng độ cồn, t (h) là thời điểm đo tính từ ngay sau khi uống 15 ml đồ uống có cồn.

(Nguồn: P. Wilkinson et al., Pharmacokinetics of Ethanol after Oral Administration in the Fasting State, 1977)

Giả sử một người uống hết nhanh 15 ml đồ uống có cồn. Tính tốc độ chuyển hoá nồng độ cồn trong máu của người đó tại thời điểm $t = 3$ (h) (làm tròn kết quả đến hàng phần triệu).

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

§1 ĐỊNH NGHĨA ĐẠO HÀM. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM

1. B. **2.** D. **3.** B. **4.** C. **5.** A.

6. a) $f'(x)=1$. b) $g'(x)=8x$.

c) Xét Δx là số gia của biến số tại điểm x.

Ta có: $\Delta h = h(x+\Delta x)-h(x)=\dfrac{1}{x+\Delta x-1}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{-\Delta x}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$.

Suy ra: $\dfrac{\Delta h}{\Delta x}=\dfrac{\dfrac{-\Delta x}{(x+\Delta x-1)(x-1)}}{\Delta x}=\dfrac{-1}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$.

Ta thấy: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta h}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-1}{(x+\Delta x-1)(x-1)}=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$. Vậy $h'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$.

7*. • Với $x>2$, ta có: $f(x)=|x-2|=x-2$. Đạo hàm của hàm số $f(x)=|x-2|$ tại điểm $x>2$ là 1.

• Với $x<2$, ta có: $f(x)=|x-2|=2-x$. Đạo hàm của hàm số $f(x)=|x-2|$ tại điểm $x<2$ là -1.

• Xét Δx là số gia của biến số tại điểm $x_0=2$.

Ta có: $\Delta f=f(2+\Delta x)-f(2)=|2+\Delta x-2|-|2-2|=|\Delta x|$.

Suy ra: $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$. Ta thấy: $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1;$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

Do đó, không tồn tại $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$. Vậy hàm số $f(x)=|x-2|$ không có đạo hàm tại điểm $x_0=2$, nhưng có đạo hàm tại mọi điểm $x\neq 2$.

8. Ta có: $f'(x)=3x^2$.

a) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng -1 là: $y=3x+2$.

b) Ta có: $f(x)=x^3=8 \Leftrightarrow x=2$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 8 là: $y=12x-16$.

9. Xét Δt là số gia của biến số tại điểm t.

Ta có:

$\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t) = \frac{1}{2} . 9,8 . (t+\Delta t)^2 - \frac{1}{2} . 9,8 . t^2 = 4,9[2t\Delta t + (\Delta t)^2]$.

Suy ra: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{4,9[2t\Delta t + (\Delta t)^2]}{\Delta t} = 9,8t + 4,9\Delta t$.

Ta thấy: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} (9,8t + 4,9\Delta t) = 9,8t$. Vậy $v(t) = s'(t) = 9,8t$.

a) Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 3$ (s) là:

$$v(3) = 9,8 . 3 = 29,4 \text{ (m/s)}.$$

b) Theo đề bài, ta có: $v(t) = 9,8t = 39,2 \Leftrightarrow t = 4$.

Vậy vận tốc tức thời của vật đạt 39,2 m/s tại thời điểm $t = 4$ (s).

§2 CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

10. D. **11. B.** **12. C.** **13. A.** **14. B.** **15. D.** **16. B.**

17. a) Ta có: $f'(x) = (x^2+2x)'e^{x^2+2x} = (2x+2)e^{x^2+2x}$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = 2$ là: $f'(2) = (2 . 2 + 2)e^{2^2+2 . 2} = 6e^8$.

b) Ta có: $g'(x) = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]' = \left(\frac{3}{2}\right)^x \ln\frac{3}{2}$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = 2$ là: $g'(2) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \ln\frac{3}{2} = \frac{9}{4}\ln\frac{3}{2}$.

c) Ta có: $h(x) = 2^x . 3^x . 9 = 9 . 6^x$.

Suy ra $h'(x) = 9\ln 6 . 6^x$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = 2$ là: $h'(2) = 9\ln 6 . 6^2 = 324\ln 6$.

d) Ta có: $k'(x) = \frac{(x^2-x)'}{(x^2-x)\ln 3} = \frac{2x-1}{x(x-1)\ln 3}$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = 2$ là: $k'(2) = \frac{2 . 2 - 1}{2(2-1)\ln 3} = \frac{3}{2\ln 3}$.

18. a) $f'(x) = 2(\sqrt{x})'[-\sin(\sqrt{x})] = \frac{-\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.

b) $g'(x) = \frac{(x^2)'}{\cos^2(x^2)} = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}$.

c) Ta có: $h(x) = \cos^2(3x) - \sin^2(3x) = \cos(6x)$.

Suy ra $h'(x) = (6x)'[-\sin(6x)] = -6\sin(6x)$.

d) $k'(x) = (\sin^2 x)' + (e^x)' \,.\, \sqrt{x} + e^x \,.\, (\sqrt{x})' = 2\sin x\cos x + e^x\sqrt{x} + \dfrac{e^x}{2\sqrt{x}}$.

19. Ta có: $f'(x) = (3x-6)' \,.\, 2^{3x-6}\ln 2 = 3\ln 2 \,.\, 2^{3x-6}$. Khi đó,

$f'(x) = 3\ln 2 \Leftrightarrow 3\ln 2 \,.\, 2^{3x-6} = 3\ln 2 \Leftrightarrow 2^{3x-6} = 1 \Leftrightarrow 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

20. a) Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$.

Khi đó, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 24 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 4$.

b) Ta có: $f'(x) = -\dfrac{(x+1)'}{(x+1)\ln 5} = \dfrac{-1}{(x+1)\ln 5}$.

Khi đó, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{(x+1)\ln 5} < 0 \Leftrightarrow x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

21. Ta có: $g'(x) = 2f(x)f'(x) + 2f(x) + 2xf'(x)$.

Vậy $g'(0) = 2f(0)f'(0) + 2f(0) + 2 \,.\, 0 \,.\, f'(0) = 4$.

22. a) $y = x - 1$. b) $y = 5x - 1$ hoặc $y = -5x - 16$.

23. Ta có: $y'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2}$.

a) Vì d song song với đường thẳng $y = 5x - 2$ nên $\dfrac{5}{(x+2)^2} = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -3. \end{array}\right.$

Với $x = -1$ thì $y(-1) = -4$, phương trình tiếp tuyến d là: $y = 5x + 1$.

Với $x = -3$ thì $y(-1) = 6$, phương trình tiếp tuyến d là: $y = 5x + 21$.

b) Vì d vuông góc với đường thẳng $y = -20x + 1$ nên $\dfrac{5}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{20} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -12 \\ x = 8. \end{array}\right.$

Với $x = -12$ thì $y(-12) = \dfrac{3}{2}$, phương trình tiếp tuyến d là: $y = \dfrac{1}{20}x + \dfrac{21}{10}$.

Với $x = 8$ thì $y(8) = \dfrac{1}{2}$, phương trình tiếp tuyến d là: $y = \dfrac{1}{20}x + \dfrac{1}{10}$.

24. Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t (s) là: $v(t) = s'(t) = t^2 - 6t + 8$.

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ (s) là:

$$v(5) = 5^2 - 6 \,.\, 5 + 8 = 3 \text{ (m/s)}.$$

25. Cường độ dòng điện tức thời trong mạch tại thời điểm t (s) là:

$$I(t) = Q'(t) = 10^{-5} \,.\, 2\,000\cos\left(2\,000t + \frac{\pi}{3}\right) = 0,02\cos\left(2\,000t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Cường độ dòng điện tức thời trong mạch tại thời điểm $t = \dfrac{\pi}{1\,500}$ (s) là:

$$I\left(\frac{\pi}{1\,500}\right) = 0,02\cos\left(2\,000 \,.\, \frac{\pi}{1\,500} + \frac{\pi}{3}\right) = 0,01 \text{ (A)}.$$

26. Tính từ năm 2010 đến năm 2015, chọn năm 2010 làm mốc, ta có:

$$1\,153\,600 = 1\,038\,229 \,.\, e^{5r} \Rightarrow r \approx 0,021.$$

Khi đó, ta có: $S(N) \approx 1\,038\,229 \,.\, e^{0,021N}$, suy ra tốc độ gia tăng dân số vào thời điểm sau N năm kể từ năm 2010 là:

$$S'(N) \approx 0,021 \,.\, 1\,038\,229 \,.\, e^{0,021N} = 21\,802,809 \,.\, e^{0,021N}.$$

Tốc độ gia tăng dân số tỉnh D vào năm 2023 (sau 13 năm từ năm 2010) là:

$$S'(13) \approx 21\,802,809 \,.\, e^{0,021\,.\,13} \approx 28\,647 \text{ (người/năm)}.$$

27. a) Vận tốc tức thời của ô tô tại thời điểm t (s) là: $v(t) = s'(t) = 20 - 5t$.

Vận tốc tức thời của ô tô ngay khi đạp phanh ($t = 0$ (s)) là:

$$v(0) = 20 - 5 \,.\, 0 = 20 \text{ (m/s)}.$$

Ta có: 20 m/s = 72 km/h > 70 km/h. Suy ra ô tô trên đã chạy quá tốc độ giới hạn cho phép.

b) Khi xảy ra va chạm, ô tô đã đi được 20,4 m kể từ khi đạp phanh nên

$$20,4 = 20t - \frac{5}{2}t^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1,2 \\ t = 6,8 \end{array}\right.$$

Vì $0 \le t \le 4$ nên $t = 1,2$ (s).

Vận tốc tức thời của ô tô ngay khi xảy ra va chạm ($t = 1,2$ (s)) là:

$$v(1,2) = 20 - 5 \,.\, 1,2 = 14 \text{ (m/s)}.$$

28. Ta có: $y'(x) = 10 - \dfrac{x}{50}$.

Vậy doanh thu tăng thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm tại mốc sản phẩm $x_0 = 10\,000$ là:

$$y'(10\,000) = 10 - \frac{10\,000}{50} = -\,190 \text{ (đồng)}.$$

§3 ĐẠO HÀM CẤP HAI

29. B. **30. A**. **31. B**. **32. C**.

33. a) Ta có: $f'(x) = -\dfrac{(3\quad + 5)'}{(3x+5)^2} = \dfrac{-3}{(3x+5)^2}$,

$$f''(x) = \frac{(-3)'(3x+5)^2 - [(3x+5)^2]'(-3)}{(3x+5)^4} = \frac{18}{(3x+5)^3}.$$

b) Ta có: $g'(x) = (x+3x^2)'\ln 2\ .\ 2^{x+3x^2} = (6x+1)\ln 2\ .\ 2^{x+3x^2}$,

$$g''(x) = \ln 2[(6x+1)'\ .\ 2^{x+3x^2} + (6x+1)\ .\ (2^{x+3x^2})']$$

$$= 6\ln 2\ .\ 2^{x+3x^2} + [(6x+1)\ln 2]^2\ .\ 2^{x+3x^2}.$$

34. a) Ta có: $f(x) = \sin x\ .\ \cos x\ .\ \cos 2x = \dfrac{1}{2}\sin 2x\ .\ \cos 2x = \dfrac{1}{4}\sin 4x.$

Khi đó, $f'(x) = \dfrac{1}{4}(4x)'\cos 4x = \cos 4x$, $f''(x) = (4x)'(-\sin 4x) = -4\sin 4x.$

b) Vì $f''(x) = -4\sin 4x$ nên $f''\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -4\sin\left(4\ .\ \dfrac{\pi}{6}\right) = -2\sqrt{3}.$

35. Ta có: $f'(x) = 3x^2 + 8x$, $f''(x) = 6x + 8$.

Khi đó, $f'(x) - f''(x) = 3x^2 + 8x - 6x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -2 \\ x \geq \dfrac{4}{3}. \end{array}\right.$

36. Ta có: $s'(t) = t^2 - 6t + 8$, $s''(t) = 2t - 6$.

a) Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ (s) là: $s''(5) = 4$ (m/s^2).

b) Theo giả thiết, $s'(t) = t^2 - 6t + 8 = -1 \Leftrightarrow t = 3$ (s).

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 3$ (s) là: $s''(3) = 0$ (m/s^2).

37. Ta có: $s''(t) = -3\sin\left(t + \dfrac{\pi}{3}\right).$

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \dfrac{\pi}{2}$ (s) là:

$$s''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-3}{2} \text{ (cm/s}^2\text{)}.$$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

38. C. **39.** A. **40.** D. **41.** C. **42.** A. **43.** C. **44.** B. **45.** D.

46. a) $12x(2x^2+1)^2$.

b) Vì $y = \sin 3x \cos 2x - \sin 2x \cos 3x = \sin(3x-2x) = \sin x$ nên $y'(x) = \cos x$.

c) Vì $y = \dfrac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x \tan 2x} = \tan(x+2x) = \tan(3x)$ nên $y'(x) = \dfrac{3}{\cos^2 3x}$.

d) Vì $y = \dfrac{e^{3x+1}}{2^{x-1}} = 2e\left(\dfrac{e^3}{2}\right)^x$ nên $y'(x) = 2e(3-\ln 2)\left(\dfrac{e^3}{2}\right)^x$.

47. Ta có: $f'(x) = \dfrac{4}{4x+3}$, $f''(x) = -\dfrac{16}{(4x+3)^2}$ nên $f'(1) = \dfrac{4}{7}$, $f''(1) = -\dfrac{16}{49}$.

48. a) Ta có: $f'(x) = x^2 - x - 12$ nên $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4 \\ x < -3. \end{array}\right.$

b) Ta có: $f''(x) = 2x - 1$ nên $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

49. a) $f'(x) = \dfrac{11}{(x+4)^2}$. b) $y = 11x + 24$. c) $y = \dfrac{1}{11}x + \dfrac{4}{11}$.

50. Ta có: $s'(t) = 12\cos\left(6t + \dfrac{\pi}{4}\right)$, $s''(t) = -72\sin\left(6t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \dfrac{\pi}{4}$ (s) là:

$$s'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 12\cos\left(6 \,.\, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 6\sqrt{2}\ \text{(cm/s)}.$$

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \dfrac{\pi}{4}$ (s) là:

$$s''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -72\sin\left(6 \,.\, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 36\sqrt{2}\ (\text{cm/s}^2).$$

51. Gia tốc tức thời của tàu con thoi tại thời điểm t (s) là:

$$a(t) = v'(t) = 0,003906t^2 - 0,18058t + 23,61\ (\text{ft/s}^2).$$

Gia tốc tức thời của tàu con thoi tại thời điểm $t = 100$ (s) là:

$$a(100) = 0,003906 \,.\, 100^2 - 0,18058 \,.\, 100 + 23,61 = 44,612\ (\text{ft/s}^2).$$

52. Ta có: $C'(t) = 1,35e^{-2,802t} - 3,7827te^{-2,802t}$. Vậy tốc độ chuyển hoá nồng độ cồn tức thời trong máu của người đó tại thời điểm $t = 3$ (h) là:

$$C'(3) = 1,35e^{-2,802\,.\,3} - 3,7827 \,.\, 3e^{-2,802\,.\,3} \approx -0,002235\ \left(\frac{\text{mg/ml}}{\text{h}}\right).$$

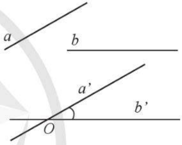
Chương VIII QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC

§1 HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Góc giữa hai đường thẳng trong không gian

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm O và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b (*Hình 1*), kí hiệu (a, b) hoặc $\widehat{(a, b)}$.



Hình 1

Nhận xét

• Góc giữa hai đường thẳng a, b không phụ thuộc vào vị trí điểm O. Thông thường, khi tìm góc giữa hai đường thẳng a, b, ta chọn O thuộc a hoặc O thuộc b.

• Góc giữa hai đường thẳng a, b bằng góc giữa hai đường thẳng b, a, tức là $(a, b) = (b, a)$.

• Góc giữa hai đường thẳng không vượt quá 90^o.

• Nếu $a // b$ thì $(a, c) = (b, c)$ với mọi đường thẳng c trong không gian.

2. Hai đường thẳng vuông góc trong không gian

Hai đường thẳng được gọi là *vuông góc* với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^o.

Khi hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, ta kí hiệu $a \perp b$.

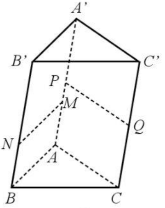
Nhận xét: Nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó vuông góc với đường còn lại.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Xác định góc giữa hai đường thẳng

Phương pháp: Đưa bài toán về xác định góc giữa hai đường thẳng trong cùng mặt phẳng

Ví dụ 1 Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC cân tại A và $\widehat{BAC} = 120°$. Các điểm M, N lần lượt thuộc hai đoạn thẳng AA' và BB' thoả mãn $MN \parallel AB$, các điểm P, Q lần lượt thuộc hai đoạn thẳng AA' và CC' (P khác M) thoả mãn $PQ \parallel AC$ (*Hình 2*). Tính các góc sau:



Hình 2

a) (AB, AC);   b) $(AB, B'C')$;   c) (MN, PQ).

Giải

a) Trong mặt phẳng (ABC), vì $\widehat{BAC} = 120°$ nên

$$(AB, AC) = 180° - 120° = 60°.$$

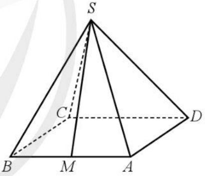
b) Vì tam giác ABC cân tại A nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \dfrac{180° - \widehat{BAC}}{2} = \dfrac{180° - 120°}{2} = 30°$.

Ta có $BC \parallel B'C'$ nên $(AB, B'C') = (AB, BC) = \widehat{ABC} = 30°$.

c) Vì $MN \parallel AB$, $PQ \parallel AC$ nên $(MN, PQ) = (AB, AC) = 60°$.

Vấn đề 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Ví dụ 2 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, SAB là tam giác cân tại S. Gọi M là trung điểm AB (*Hình 3*). Chứng minh rằng $SM \perp CD$.



Hình 3

Giải

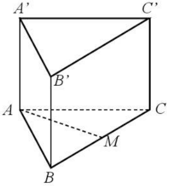
Vì $SA = SB$, $MA = MB$ nên SM là đường trung trực của AB trong (SAB). Suy ra $SM \perp AB$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD$.

Từ đó, suy ra $SM \perp CD$.

BÀI TẬP

1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác đều và $ABB'A'$ là hình chữ nhật. Gọi M là trung điểm của BC (*Hình 4*).



Hình 4

a) Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và $B'C'$ bằng:

A. $30°$.   **B.** $45°$.

C. $60°$.   **D.** $90°$.

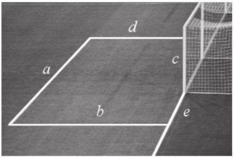
b) Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CC' bằng:

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

c) Số đo góc giữa hai đường thẳng AM và $A'C'$ bằng:

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

2. *Hình 5* gợi nên hình ảnh một số cặp đường thẳng vuông góc với nhau. Hãy chỉ ra ba cặp đường thẳng vuông góc với nhau.



Hình 5

3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông.

a) Chứng minh rằng $AB \perp A'D'$ và $AC \perp B'D'$.

b) Tính góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B'$.

4. Cho hình lăng trụ $MNPQ.M'N'P'Q'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng $M'N \perp P'Q$.

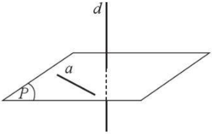
5*. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính góc giữa hai đường thẳng AD và BC, biết $MN = a\sqrt{3}$ và $AD = BC = 2a$.

§2 ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu đường thẳng d vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) (*Hình 6*), kí hiệu $d \perp (P)$ hoặc $(P) \perp d$.



Hình 6

2. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

Nhận xét: Ta có thể chứng minh hai đường thẳng vuông góc bằng cách chứng minh một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng chứa đường thẳng kia.

3. Tính chất

• **Tính chất 1:** Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

• **Tính chất 2:** Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

4. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

• **Tính chất 3:**

Cho hai đường thẳng song song. Một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

• **Tính chất 4:**

Cho hai mặt phẳng song song. Một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

5. Phép chiếu vuông góc

Cho mặt phẳng (P) và một điểm M tuỳ ý trong không gian. Lấy đường thẳng d đi qua M và vuông góc với (P), gọi giao điểm của d và (P) là M'. Điểm M' gọi là *hình chiếu vuông góc* (hay *hình chiếu*) của điểm M trên (P).

Cho mặt phẳng (P). Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu vuông góc M' của điểm đó lên mặt phẳng (P) được gọi là *phép chiếu vuông góc* lên mặt phẳng (P).

***Nhận xét*:** Vì phép chiếu vuông góc là một trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song (khi phương chiếu vuông góc với mặt phẳng chiếu) nên phép chiếu vuông góc có đầy đủ các tính chất của phép chiếu song song.

6. Định lí ba đường vuông góc

Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P). Khi đó, d vuông góc với a khi và chỉ khi d vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, hai đường thẳng vuông góc

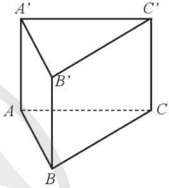
Ví dụ 1 Cho tam giác ABC. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua A và vuông góc với cả AB, AC?

Giải

Giả sử đường thẳng d đi qua A và vuông góc với cả AB và AC. Khi đó, đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Suy ra đường thẳng d là duy nhất.

Ví dụ 2 Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' \perp (ABC)$ (*Hình 7*). Chứng minh rằng:

a) $BB' \perp (A'B'C')$; b) $AA' \perp (A'B'C')$.



Hình 7

Giải

a) Vì $BB' \parallel AA'$ và $AA' \perp (ABC)$ nên $BB' \perp (A'B'C')$.

b) Vì $(A'B'C') \parallel (ABC)$ và $AA' \perp (ABC)$ nên $AA' \perp (A'B'C')$.

Ví dụ 3 Cho hình chóp S.$ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $ABCD$ là hình chữ nhật thì $BC \perp (SAB)$;

a) Nếu $ABCD$ là hình thoi thì $SC \perp BD$.

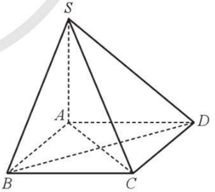
Giải. (*Hình 8*)

a) Vì $SA \perp (ABCD)$ và $BC \subset (ABCD)$ nên $SA \perp BC$.

Mà $BC \perp BA$ vì $ABCD$ là hình chữ nhật, BA cắt SA trong mặt phẳng (SAB). Suy ra $BC \perp (SAB)$.

b) Vì $ABCD$ là hình thoi nên $BD \perp AC$.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$. Mà $BD \perp AC$ nên theo định lí ba đường vuông góc, ta có $BD \perp SC$.



Hình 8

Ví dụ 4 Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABC)$, $BC \perp AB$. Lấy hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC và điểm P nằm trên cạnh SA. Chứng minh rằng tam giác MNP là tam giác vuông.

Giải. (*Hình 9*)

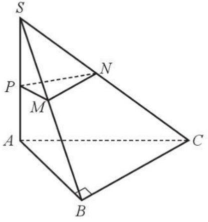
Vì $SA \perp (ABC)$ mà $BC \subset (ABC)$ nên $SA \perp BC$.

Mà $BC \perp AB$, AB và SA cắt nhau trong mặt phẳng (SAB). Suy ra $BC \perp (SAB)$.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC nên $MN \parallel BC$. Suy ra $MN \perp (SAB)$.

Mà $PM \subset (SAB)$ nên $MN \perp PM$.

Vậy tam giác MNP vuông tại M.

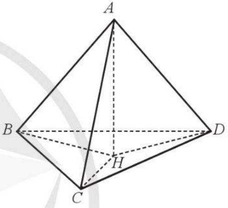


Hình 9

Ví dụ 5 Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$, $AC \perp BD$. Gọi H là hình chiếu của A trên (BCD). Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác BCD và $AD \perp BC$.

Giải. (*Hình 10*)

Vì $AH \perp (BCD)$ nên HB, HC, HD lần lượt là hình chiếu của AB, AC, AD trên mặt phẳng (BCD). Mà $CD \perp AB$, $BD \perp AC$ nên theo định lí ba đường vuông góc, ta có $CD \perp BH$, $BD \perp CH$. Suy ra H là trực tâm của tam giác BCD.



Hình 10

Khi đó $BC \perp HD$. Mà HD là hình chiếu của AD trên mặt phẳng (BCD) nên theo định lí ba đường vuông góc, ta có $BC \perp AD$.

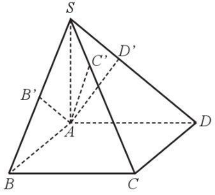
Vấn đề 2. Vận dụng trong một số bài toán xác định vị trí tương đối giữa các đối tượng của hình học không gian

Ví dụ 6 Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Gọi B', C', D' lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC, SD.

Chứng minh rằng:

a) $SC \perp (AB'C')$ và $SC \perp (AC'D')$;

b) Bốn điểm A, B', C', D' cùng nằm trên một mặt phẳng.



Hình 11

Giải. (*Hình 11*)

a) Vì $SA \perp (ABCD)$ và $BC \subset (ABCD)$ nên $SA \perp BC$. Mà $BC \perp BA$ vì $ABCD$ là hình chữ nhật và SA, BA cắt nhau trong mặt phẳng (SAB). Suy ra $BC \perp (SAB)$.

Ngoài ra, $AB' \subset (SAB)$ nên $BC \perp AB'$. Mà $AB' \perp SB$ và SB, BC cắt nhau trong mặt phẳng (SBC) nên $AB' \perp (SBC)$.

Vì $SC \subset (SBC)$ nên $AB' \perp SC$. Mà $SC \perp AC'$ và AB', AC' cắt nhau trong mặt phẳng $(AB'C')$ nên $SC \perp (AB'C')$.

Tương tự ta chứng minh được $SC \perp (AC'D')$.

b) Vì hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(AC'D')$ cùng đi qua điểm A và vuông góc với SC nên hai mặt phẳng này trùng nhau. Vậy bốn điểm A, B', C', D' cùng nằm trên một mặt phẳng.

Ví dụ 7 Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$, các tam giác BCD và ACD là những tam giác nhọn. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác BCD, ACD. Chứng minh rằng:

a) $CD \perp (ABH)$ và $CD \perp (ABK)$;

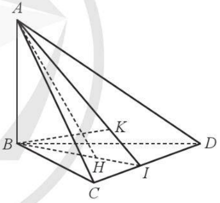
b) Bốn điểm A, B, H, K cùng thuộc một mặt phẳng.

c) Ba đường thẳng AK, BH, CD cùng đi qua một điểm.

Giải. (*Hình 12*)

a) Vì $AB \perp (BCD)$ và $CD \subset (BCD)$ nên $AB \perp CD$. Mà $BH \perp CD$ vì H là trực tâm của tam giác BCD và AB, BH cắt nhau trong mặt phẳng (ABH) nên $CD \perp (ABH)$.

Tương tự ta chứng minh được $CD \perp (ABK)$.



Hình 12

b) Vì hai mặt phẳng (ABH) và (ABK) cùng đi qua điểm A và vuông góc với CD nên hai mặt phẳng này trùng nhau. Vậy bốn điểm A, B, H, K cùng thuộc một mặt phẳng.

c) Trong mặt phẳng (BCD), gọi I là giao điểm của BH và CD. Khi đó, ba điểm A, K, I đều thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng $(ABHK)$ và (ACD). Suy ra A, K, I thẳng hàng. Vậy ba đường thẳng AK, BH, CD cùng đi qua một điểm.

BÀI TẬP

6. Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng c không nằm trên (P). Khi đó, $(P) \perp c$ nếu:

A. Mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b thoả mãn a, b cùng vuông góc với đường thẳng c.

B. Mặt phẳng (P) chứa một đường thẳng vuông góc với đường thẳng c.

C. Mặt phẳng (P) chứa ít nhất hai đường thẳng vuông góc với đường thẳng c.

D. Mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b thoả mãn a, b cùng vuông góc với đường thẳng c.

7. Cho tam giác ABC. Số mặt phẳng đi qua A và vuông góc với cả AB, AC là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

8. Cho điểm I và hai đường thẳng a, b thoả mãn $a \parallel b$. Số mặt phẳng đi qua I và vuông góc với cả a, b là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

9. *Hình 13* gợi nên hình ảnh các đường thẳng a, b và mặt phẳng (P) trong không gian. Phát biểu nào sau đây là phù hợp?

A. $a \parallel b$, $b \parallel (P)$.

B. $a \perp b$, $b \parallel (P)$.

C. $a \perp b$, $b \perp (P)$.

D. $a \parallel b$, $b \perp (P)$.

Hình 13

10. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$. Xét những phát biểu sau:

(1): AB là hình chiếu của SB trên (ABC);

(2): SB là hình chiếu của SC trên (SAB);

(3): AC là hình chiếu của SC trên (ABC).

Số phát biểu đúng là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

11. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' \perp (ABC)$. Trong mặt phẳng (ABC), gọi H là hình chiếu của A trên BC. Chứng minh rằng $BC \perp A'H$.

12. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 90°$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $SH \perp (ABC)$.

13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành và $SA = SC$, $SB = SD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình thoi, $AA' \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:

a) $BB' \perp (A'B'C'D')$;

b) $BD \perp A'C$.

15. Cho hình chóp $O.ABC$ và điểm H không thuộc các đường thẳng AB, BC, CA sao cho $\widehat{OHA} = \widehat{OHB} = \widehat{OHC} = 90°$. Chứng minh rằng H thuộc mặt phẳng (ABC).

16. Cho hình chóp $S.ABC$ thoả mãn $SA = SB = SC$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Chứng minh rằng $SO \perp (ABC)$.

17. Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P đôi một phân biệt thoả mãn $MA = MB = MC$, $NA = NB = NC$, $PA = PB = PC$. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

18. Cho hình tứ diện đều $ABCD$. Chứng minh $AB \perp CD$.

19. Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$, các tam giác BCD và ACD là những tam giác nhọn. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác BCD, ACD. Chứng minh rằng:

a) $AD \perp CH$;

b*) $HK \perp (ACD)$.

20. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm của ba tam giác SAB, SBC, SCA. Chứng minh rằng $SA \perp (MNP)$.

21. Cho hình chóp $S.ABCD$ thoả mãn $SA = SB = SC = SD$. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua cả bốn đỉnh của tứ giác $ABCD$.

22*. Cho mặt phẳng (P) và hai điểm A, B sao cho B thuộc (P) và A không thuộc (P). Điểm C chuyển động trên mặt phẳng (P) thoả mãn $\widehat{ACB} = 90°$. Chứng minh rằng C chuyển động trên một đường tròn cố định trong (P).

23*. Cho đoạn thẳng AB và mặt phẳng (P) sao cho $(P) \perp AB$ và (P) cắt đoạn thẳng AB tại điểm H thoả mãn $HA = 4$ cm, $HB = 9$ cm. Điểm C chuyển động trong mặt phẳng (P) thoả mãn $\widehat{ACB} = 90°$. Chứng minh rằng điểm C thuộc đường tròn tâm H bán kính 6 cm trong mặt phẳng (P).

§3 GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG. GÓC NHỊ DIỆN

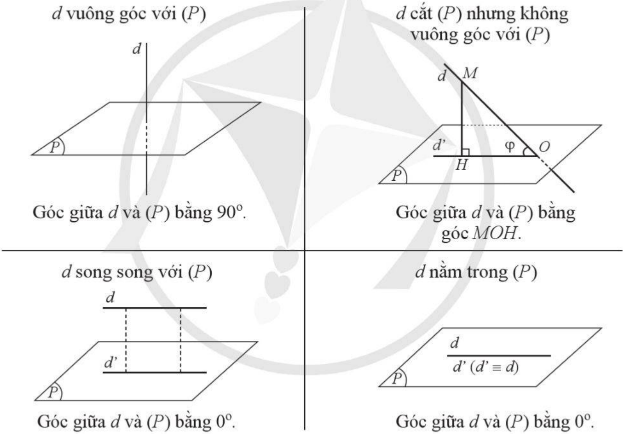
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P), ta có định nghĩa sau:

• Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa d và (P) bằng 90°.

• Nếu đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là góc giữa d và hình chiếu d' của đường thẳng d trên (P).



Hình 14

Nhận xét: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng có số đo từ 0° đến 90° (*Hình 14*).

2. Góc nhị diện

a) Nửa mặt phẳng

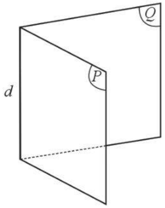
Một đường thẳng nằm trong mặt phẳng chia mặt phẳng đó thành hai phần, mỗi phần được gọi là một *nửa mặt phẳng* và đường thẳng đó được gọi là *bờ* của mỗi nửa mặt phẳng này.

b) Góc nhị diện

Góc nhị diện là hình gồm hai nửa mặt phẳng có chung bờ.

Ví dụ Xét góc nhị diện gồm hai nửa mặt phẳng (P) và (Q) có chung bờ là đường thẳng d (*Hình 15*), kí hiệu là $[P, d, Q]$. Đường thẳng d gọi là *cạnh* của góc nhị diện, mỗi nửa mặt phẳng (P) và (Q) gọi là một *mặt* của góc nhị diện.

Chú ý: Góc nhị diện còn được kí hiệu là $[M, d, N]$ với M, N lần lượt là các điểm thuộc các nửa mặt phẳng (P), (Q) nhưng không thuộc đường thẳng d.



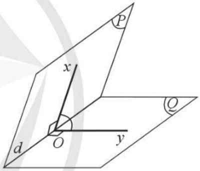
Hình 15

c) Góc phẳng nhị diện

Trong không gian, cho góc nhị diện. Một góc có đỉnh thuộc cạnh của góc nhị diện, hai cạnh của góc đó lần lượt thuộc hai mặt nhị diện và cùng vuông góc với cạnh của góc nhị diện, được gọi là *góc phẳng nhị diện* của góc nhị diện đã cho.

Ví dụ Cho góc nhị diện $[P, d, Q]$. Lấy O thuộc d, hai tia Ox, Oy lần lượt nằm trên hai nửa mặt phẳng (P), (Q) và cùng vuông góc với d. Khi đó góc xOy là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[P, d, Q]$ (*Hình 16*).

Nhận xét: Cạnh của góc nhị diện luôn vuông góc với mặt phẳng chứa góc phẳng nhị diện của góc nhị diện đó.



Hình 16

d) Số đo của góc nhị diện

• Số đo của một góc phẳng nhị diện được gọi là *số đo của góc nhị diện* đó.

• Nếu số đo góc phẳng nhị diện bằng 90° thì góc nhị diện đó gọi là *góc nhị diện vuông*.

Nhận xét: Số đo của góc nhị diện từ 0° đến 180°.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

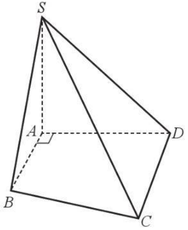
Phương pháp: Đưa bài toán về xác định góc giữa hai đường thẳng, cụ thể là góc giữa đường thẳng và hình chiếu của nó trên mặt phẳng.

Ví dụ 1 Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $AB \perp AD$, $SA = AD = a\sqrt{3}$, $AB = a$. Tính số đo của:

a) Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB).

Giải. (*Hình 17*)



Hình 17

a) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AB là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$. Suy ra góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa SB và AB, hay bằng $\widehat{SBA}$.

Trong tam giác vuông SAB có

$$\tan\widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \text{ nên } \widehat{SBA} = 60°.$$

Suy ra góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°.

b) Vì $SA \perp (ABCD)$ và $AD \subset (ABCD)$ nên $SA \perp AD$. Mà $AD \perp AB$ và SA, AB cắt nhau trong mặt phẳng (SAB) nên $AD \perp (SAB)$. Suy ra SA là hình chiếu của SD trên (SAB), khi đó góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB) bằng góc giữa SD và SA, hay bằng $\widehat{DSA}$. Vì tam giác DSA vuông cân tại A nên $\widehat{DSA} = 45°$. Vậy góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB) bằng 45°.

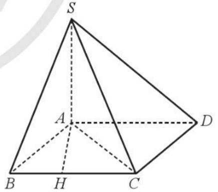
Vấn đề 2. Tính số đo của góc nhị diện

Phương pháp: Xác định vị trí của góc phẳng nhị diện (nằm trên mặt phẳng vuông góc với cạnh của góc nhị diện) rồi tính số đo của góc phẳng nhị diện đó.

Ví dụ 2 Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $AC = a$. Tính số đo của mỗi góc nhị diện sau:

a) $[B, SA, C]$; b) $[S, DA, B]$.

Giải. (*Hình 18*)



Hình 18

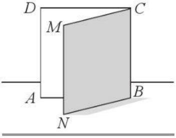
a) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AB$, $SA \perp AC$, suy ra góc BAC là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[B, SA, C]$. Do $AC = AB = BC = a$ nên tam giác ABC đều, suy ra $\widehat{BAC} = 60°$. Vậy góc nhị diện $[B, SA, C]$ có số đo bằng 60°.

b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, lấy H thuộc BC sao cho $AH \perp AD$. Mà $SA \perp AD$ (vì $SA \perp (ABCD)$ và $AD \subset (ABCD)$) nên góc SAH là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[S, DA, B]$. Mặt khác, $SA \perp (ABCD)$ và $AH \subset (ABCD)$ nên $SA \perp AH$, suy ra góc SAH bằng 90°.

Vậy góc nhị diện $[S, DA, B]$ có số đo bằng 90°.

Vấn đề 3. Ứng dụng

Ví dụ 3 *Hình 19* minh hoạ một cánh cửa và khung cửa. Cánh cửa có dạng hình chữ nhật $BCMN$ và khung cửa có dạng hình chữ nhật $ABCD$, ở đó $AB = BN$. Góc mở cửa là góc nhị diện $[A, BC, N]$. Biết chiều rộng BN của cửa là 1,2 m. Khi góc mở cửa có số đo bằng 60° thì khoảng cách giữa A và N bằng bao nhiêu?



Hình 19

Giải

Vì $AB \perp BC$ và $NB \perp BC$ nên góc ABN là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[A, BC, N]$.

Vì góc mở cửa bằng 60° nên số đo góc nhị diện $[A, BC, N]$ bằng 60°, suy ra $\widehat{ABN} = 60^\circ$.

Xét tam giác ABN cân tại B có $BA = BN = 1{,}2$ m và $\widehat{ABN} = 60^\circ$. Khi đó tam giác ABN đều, suy ra $AN = 1{,}2$ m, hay khoảng cách giữa A và N bằng 1,2 m.

C. BÀI TẬP

24. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau, đường thẳng d cắt (P) sao cho góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng φ $(0^\circ < \varphi < 90^\circ)$. Khi đó, góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (Q) bằng:

A. $90^\circ - \varphi$. **B.** $180^\circ - \varphi$. **C.** φ. **D.** $90^\circ + \varphi$.

25. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau, mặt phẳng (P) cắt a sao cho góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng φ $(0^\circ < \varphi < 90^\circ)$. Khi đó, góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) bằng:

A. $90^\circ - \varphi$. **B.** φ. **C.** $90^\circ + \varphi$. **D.** $180^\circ - \varphi$.

26. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi I là hình chiếu của A trên BC, α là góc giữa đường thẳng SI và mặt phẳng (ABC), β là số đo của góc nhị diện $[S, BC, A]$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\alpha = 90^\circ - \beta$. **B.** $\alpha = 180^\circ - \beta$. **C.** $\alpha = 90^\circ + \beta$. **D.** $\alpha = \beta$.

27. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$, $SA = AB = 3a$, $BC = 4a$. Gọi α, β, γ lần lượt là số đo của các góc nhị diện $[B, SA, C]$, $[A, BC, S]$, $[A, SC, B]$. Tính:

a) $\cos\alpha$, $\cos\beta$; b*) $\cos\gamma$.

28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông, AC cắt BD tại O, $SO \perp (ABCD)$. Tất cả các cạnh của hình chóp bằng a.

a) Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC).

b) Gọi α là số đo của góc nhị diện $[S, CD, A]$. Tính $\cos\alpha$.

c) Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD), β là số đo của góc nhị diện $[A, d, D]$. Tính $\cos\beta$.

d*) Gọi γ là số đo góc nhị diện $[B, SC, D]$. Tính $\cos\gamma$.

29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $AC = a$, $SA = \frac{a}{2}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, CD, A]$.

30*. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AC cắt BD tại O. Gọi α, β lần lượt là số đo của các nhị diện $[A, SO, B]$ và $[B, SO, C]$. Tính $\alpha + \beta$.

31*. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ lần lượt là góc giữa các đường thẳng SA, SB, SC, SD và mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh rằng:

$$SA = SB = SC = SD \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4.$$

32. Một máy nước nóng sử dụng năng lượng mặt trời như ở *Hình 20* có các ống hấp nhiệt chân không dài 1,8 m được đặt trên sân thượng của một toà nhà. Khi tia nắng mặt trời chiếu vuông góc với sân thượng, bóng nắng của các ống hấp nhiệt chân không trên mặt sân dài 1,2 m. Các ống hấp nhiệt chân không đó tạo với mặt sân thượng một góc bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Hình 20

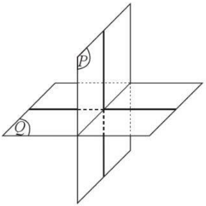
§4 HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Hai mặt phẳng cắt nhau tạo nên bốn góc nhị diện. Nếu một trong các góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì hai mặt phẳng đã cho gọi là *vuông góc với nhau.*

Ví dụ: Hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau tạo nên bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì ta nói (P) vuông góc với (Q) (*Hình 21*), kí hiệu là $(P) \perp (Q)$ hoặc $(Q) \perp (P)$.



Hình 21

2. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

Nếu mặt phẳng này chứa một đường thẳng mà đường thẳng đó vuông góc với mặt phẳng kia thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

3. Tính chất

• **Tính chất 1:** Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

• **Tính chất 2:** Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

Nhận xét:

– Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Nếu qua một điểm trong mặt phẳng (P) ta dựng đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng này nằm trong mặt phẳng (P).

– Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì hình chiếu của mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này trên mặt phẳng kia đều trùng hoặc nằm trên giao tuyến.

– Ta có thể chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng bằng cách sử dụng Tính chất 1.

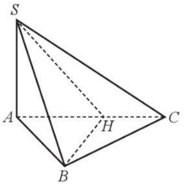
B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc, đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Ví dụ 1 Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$. Gọi H là hình chiếu của B trên AC. Chứng minh rằng:

a) $(SAB) \perp (ABC)$; b) $(SAC) \perp (ABC)$;

c) $(SAB) \perp (SBC)$; d) $(SBH) \perp (SAC)$.



Hình 22

Giải. (*Hình 22*)

a) Vì $SA \perp (ABC)$ và $SA \subset (SAB)$ nên $(SAB) \perp (ABC)$.

b) Vì $SA \perp (ABC)$ và $SA \subset (SAC)$ nên $(SAC) \perp (ABC)$.

c) Vì $(SAB) \perp (ABC)$, $BC \subset (ABC)$, $(SAB) \cap (ABC) = AB$ và $BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB)$. Mà $BC \subset (SBC)$ nên $(SAB) \perp (SBC)$.

d) Vì $(SAC) \perp (ABC)$, $BH \subset (ABC)$, $(SAC) \cap (ABC) = AC$ và $BH \perp AC$ nên $BH \perp (SAC)$. Mà $BH \subset (SBH)$ nên $(SBH) \perp (SAC)$.

Vấn đề 2. Vận dụng

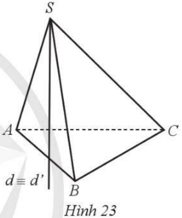
Ví dụ 2 Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi d là đường thẳng đi qua S và vuông góc với (ABC). Chứng minh rằng đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (SAB).

Giải. (*Hình 23*)

Trong mặt phẳng (SAB), lấy đường thẳng d' qua S và vuông góc với AB.

Vì $(SAB) \perp (ABC)$, $d' \subset (SAB)$, $(SAB) \cap (ABC) = AB$ và $d' \perp AB$ nên $d' \perp (ABC)$.

Vì qua điểm S có hai đường thẳng d và d' cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên d và d' trùng nhau. Suy ra $d \subset (SAB)$.



Hình 23

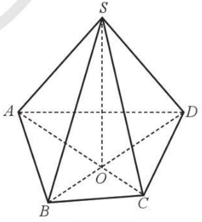
Ví dụ 3 Cho hình chóp $S.ABCD$, $(SAC) \perp (ABCD)$, $(SBD) \perp (ABCD)$. Tìm điều kiện cần và đủ của tứ giác $ABCD$ để $(SAC) \perp (SBD)$.

Giải. (*Hình 24*)

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi O là giao điểm của AC và BD.

Vì $(SAC) \cap (SBD) = SO$, $(SAC) \perp (ABCD)$, $(SBD) \perp (ABCD)$ nên $SO \perp (ABCD)$.

Mà $OA \subset (ABCD)$, $OB \subset (ABCD)$ nên $SO \perp OA$ và $SO \perp OB$. Suy ra góc AOB là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[A, SO, B]$.



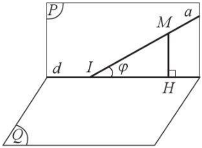
Hình 24

Từ đó, $(SAC) \perp (SBD)$ khi và chỉ khi góc nhị diện $[A, SO, B]$ là góc nhị diện vuông hay $\widehat{AOB} = 90°$, tức là $AC \perp BD$. Vậy $(SAC) \perp (SBD) \Leftrightarrow AC \perp BD$.

Ví dụ 4 Cho hai mặt phẳng (P), (Q) cắt nhau theo giao tuyến d và vuông góc với nhau, đường thẳng a nằm trên (P) thoả mãn góc giữa a và d bằng φ $(0° < \varphi < 90°)$. Chứng minh rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) bằng φ.

Giải. (*Hình 25*)

Hai đường thẳng a và d cùng nằm trong một mặt phẳng và góc giữa chúng là φ $(0° < \varphi < 90°)$ nên a, d là hai đường thẳng cắt nhau.



Hình 25

Gọi I là giao điểm của a và d. Lấy M thuộc a (M khác I), H là hình chiếu của M trên d. Vì $(P) \perp (Q)$, $MH \subset (P)$, $(P) \cap (Q) = d$ và $MH \perp d$ nên $MH \perp (Q)$, suy ra góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) bằng $\widehat{MIH} = \varphi$.

C. BÀI TẬP

33. Cho hai mặt phẳng (P), (Q) cắt nhau và đường thẳng a nằm trong (P). Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. Nếu $a \perp (Q)$ thì $(P) \perp (Q)$.
B. Nếu $a \perp (Q)$ thì $a \perp b$ với mọi $b \subset (Q)$.
C. Nếu $a \perp (Q)$ thì $(P) \,//\, (Q)$.
D. Nếu $a \perp (Q)$ thì $a \perp d$ với $d = (P) \cap (Q)$.

34. Cho hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc và cắt nhau theo giao tuyến d, đường thẳng a song song với (P). Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Nếu $a \perp d$ thì $a \perp (Q)$.

B. Nếu $a \perp d$ thì $a \,//\, (Q)$.

C. Nếu $a \perp d$ thì $a \,//\, b$ với mọi $b \subset (Q)$.

D. Nếu $a \perp d$ thì $a \,//\, c$ với mọi $c \,//\, (Q)$.

35. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì:

A. Song song với nhau.

B. Trùng nhau.

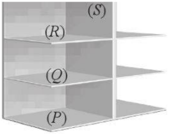
C. Không song song với nhau.

D. Song song với nhau hoặc cắt nhau theo giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Khi đó mặt phẳng $(ABCD)$ vuông góc với đường thẳng:

A. SA. **B.** SB. **C.** SC. **D.** SD.

37. *Hình 26* gợi nên hình ảnh một số cặp mặt phẳng vuông góc với nhau. Hãy chỉ ra 2 cặp mặt phẳng vuông góc với nhau.



Hình 26

38. Chứng minh các định lí sau:

a) Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng vuông góc với một trong hai mặt phẳng đó thì vuông góc với mặt phẳng còn lại.

b) Cho một mặt phẳng và một đường thẳng không vuông góc với mặt phẳng đó. Khi đó tồn tại duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng đã cho và vuông góc với mặt phẳng đã cho.

39. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' \perp (ABC)$, tam giác ABC cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $(MAA') \perp (BCC'B')$.

40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và $ABCD$ là hình chữ nhật.

Chứng minh rằng:

a) $(SAB) \perp (SBC)$;

b) $(SAD) \perp (SCD)$.

41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi, $(SAC) \perp (ABCD)$, $(SBD) \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SBD)$.

42. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{ASC} = 90°$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $(SAH) \perp (ABC)$.

43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Chứng minh rằng:

a) $(SAD) \perp (SAB)$;

b) $(SBC) \perp (SAB)$;

c) $(SAD) \perp (SBC)$.

44*. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật, $(SAC) \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD, $(SBM) \perp (ABCD)$. Giả sử $SA = 5a$, $AB = 3a$, $AD = 4a$ và góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng φ. Tính $\cos\varphi$.

§5 KHOẢNG CÁCH

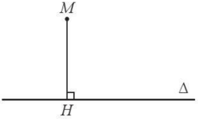
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho đường thẳng Δ và điểm M không thuộc Δ. Gọi H là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng Δ. Độ dài đoạn thẳng MH gọi là *khoảng cách* từ điểm M đến đường thẳng Δ (*Hình 27*), kí hiệu $d(M, \Delta)$.

Chú ý: Khi điểm M thuộc đường thẳng Δ thì

$$d(M, \Delta) = 0.$$



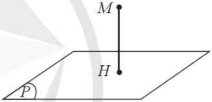
Hình 27

2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Cho mặt phẳng (P) và điểm M không thuộc mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu của M trên mặt phẳng (P). Độ dài đoạn thẳng MH gọi là *khoảng cách* từ điểm M đến mặt phẳng (P) (*Hình 28*), kí hiệu $d(M, (P))$.

Chú ý: Khi điểm M thuộc mặt phẳng (P) thì

$$d(M, (P)) = 0.$$

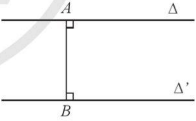


Hình 28

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song Δ, Δ' là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia, kí hiệu $d(\Delta, \Delta')$.

Ví dụ: Trong *Hình 29*, ta có: $d(\Delta, \Delta') = AB$ với $A \in \Delta$, $B \in \Delta'$, $AB \perp \Delta$, $AB \perp \Delta'$ và $\Delta // \Delta'$.

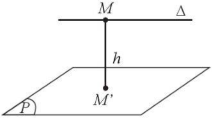


Hình 29

4. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Cho đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P). *Khoảng cách* giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng Δ đến mặt phẳng (P), kí hiệu $d(\Delta, (P))$.

Ví dụ: Trong *Hình 30*, ta có: $d(\Delta, (P)) = MM' = h$, trong đó $M \in \Delta$, $M' \in (P)$, $MM' \perp (P)$ và $\Delta // (P)$.

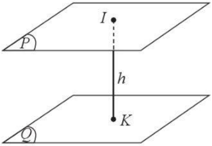


Hình 30

5. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P), (Q) là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia, kí hiệu $d((P), (Q))$.

Ví dụ: Trong *Hình 31*, ta có: $d((P), (Q)) = IK = h$ với $I \in (P)$, $K \in (Q)$, $IK \perp (P)$, $IK \perp (Q)$ và $(P) // (Q)$.



Hình 31

6. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

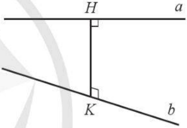
Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau.

• Đường thẳng c vừa vuông góc, vừa cắt cả hai đường thẳng a và b được gọi là đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

• Đoạn thẳng có hai đầu mút là giao điểm của đường thẳng c với hai đường thẳng a, b được gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

• Độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng a, b gọi là *khoảng cách* giữa hai đường thẳng đó, kí hiệu $d(a, b)$.

Ví dụ: Trong *Hình 32*, ta có: $d(a, b) = HK$ với HK là đoạn vuông góc chung của a và b.



Hình 32

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

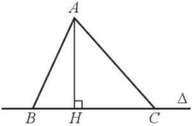
Ví dụ 1 Cho điểm A nằm ngoài đường thẳng Δ, hai điểm B, C thuộc Δ sao cho $BC = a$, diện tích tam giác ABC bằng S. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ theo a, S.

Giải. (*Hình 33*)

Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Khi đó $d(A, \Delta) = AH$. Vì diện tích tam giác ABC bằng S nên:

$$S = \frac{1}{2}AH \,.\, BC = \frac{1}{2}AH \,.\, a.$$

Suy ra: $d(A, \Delta) = AH = \dfrac{2S}{a}$.

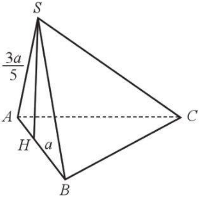


Hình 33

Vậy khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ bằng $\dfrac{2S}{a}$.

Vấn đề 2. Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Ví dụ 2 Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt đáy, tam giác SAB vuông tại S, $AB = a$, $SA = \frac{3a}{5}$. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC).



Hình 34

Giải. (*Hình 34*)

Gọi H là hình chiếu của S trên AB.

Do $(SAB) \perp (ABC)$, $(SAB) \cap (ABC) = AB$, $SH \subset (SAB)$ và $SH \perp AB$ nên $SH \perp (ABC)$. Khi đó

$$d(S, (ABC)) = SH.$$

Xét tam giác SAB vuông tại S có:

$$SB^2 = AB^2 - SA^2 = a^2 - \left(\frac{3a}{5}\right)^2 = \frac{16a^2}{25} \Rightarrow SB = \frac{4a}{5}.$$

Suy ra $d(S, (ABC)) = SH = \dfrac{SA\,.\,SB}{AB} = \dfrac{\frac{3a}{5}\cdot\frac{4a}{5}}{a} = \dfrac{12a}{25}$.

Vậy khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{12a}{25}$.

Vấn đề 3. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

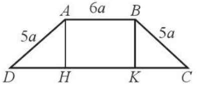
Ví dụ 3 Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$, $AB = 6a$, $CD = 14a$, $AD = BC = 5a$.

a) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên CD. Tính độ dài các đoạn thẳng HK, DH, CK.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

Giải. (*Hình 35*)

a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, vì $AH \perp CD$, $BK \perp CD$ nên $AH \parallel BK$. Mà $AB \parallel HK$, $\widehat{AHK} = 90°$ nên $ABKH$ là hình chữ nhật. Suy ra $HK = AB = 6a$.



Hình 35

Ta có $\Delta ADH = \Delta BCK$ nên

$$DH = CK = \frac{CD - HK}{2} = \frac{14a - 6a}{2} = 4a.$$

b) Vì $AB \parallel CD$, $AH \perp CD$ nên $d(AB, CD) = AH$. Xét tam giác ADH vuông tại H có $AH^2 = AD^2 - DH^2 = (5a)^2 - (4a)^2 = 9a^2$, suy ra $d(AB, CD) = AH = 3a$. Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng $3a$.

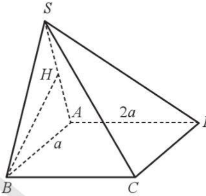
Vấn đề 4. Tính khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Ví dụ 4 Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật, SAB là tam giác đều, $(SAB) \perp (ABCD)$, $AB = a$, $AD = 2a$.

a) Chứng minh rằng CD // (SAB). Tính khoảng cách giữa CD và mặt phẳng (SAB).

b) Chứng minh rằng BC // (SAD). Tính khoảng cách giữa BC và mặt phẳng (SAD).

Giải. (*Hình 36*)



Hình 36

a) Vì CD // AB, $CD \not\subset (SAB)$ và $AB \subset (SAB)$ nên CD // (SAB).

Vì $D \in CD$ nên $d(CD, (SAB)) = d(D, (SAB))$. Do $(SAB) \perp (ABCD)$, $(SAB) \cap (ABCD) = AB$, $DA \subset (ABCD)$ và $DA \perp AB$ nên $DA \perp (SAB)$. Suy ra

$$d(CD, (SAB)) = d(D, (SAB)) = DA = 2a.$$

Vậy khoảng cách giữa CD và mặt phẳng (SAB) bằng $2a$.

b) Vì BC // AD, $BC \not\subset (SAD)$ và $AD \subset (SAD)$ nên BC // (SAD). Vì $B \in BC$ nên $d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD))$.

Gọi H là hình chiếu của B trên SA. Vì $AD \perp (SAB)$, $AD \subset (SAD)$ nên $(SAD) \perp (SAB)$. Mà $(SAB) \cap (SAD) = SA$, $BH \subset (SAB)$ và $BH \perp SA$ nên $BH \perp (SAD)$.

Xét tam giác SAB đều có $BH = AB \sin \widehat{BAS} = a \sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD)) = BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy khoảng cách giữa BC và mặt phẳng (SAD) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

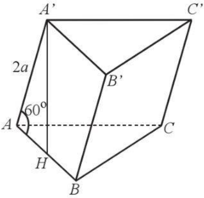
Vấn đề 5. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Ví dụ 5 Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có

$$(A'ABB') \perp (ABC), AA' = 2a, \widehat{A'AB} = 60°.$$

Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$.

Giải. (*Hình 37*)



Hình 37

Vì $A' \in (A'B'C')$ và (ABC) // $(A'B'C')$ nên $d((ABC), (A'B'C')) = d(A', (ABC))$.

Gọi H là hình chiếu của A' trên AB.

Vì $(A'ABB') \perp (ABC)$, $(A'ABB') \cap (ABC) = AB$, $A'H \subset (A'ABB')$ và $A'H \perp AB$ nên $A'H \perp (ABC)$.

Xét tam giác $A'AH$ vuông tại H có $A'H = A'A\sin\widehat{A'AH} = 2a\sin 60° = a\sqrt{3}$. Suy ra

$$d((ABC), (A'B'C')) = d(A', (ABC)) = A'H = a\sqrt{3}.$$

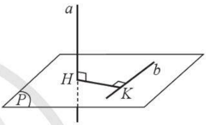
Vậy khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$ bằng $a\sqrt{3}$.

Vấn đề 6. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Phương pháp: Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b.

– Xác định mặt phẳng (P) chứa b và song song với a, khi đó d(a, b) = d(a, (P)).

– Khi a ⊥ b, ta có thể làm như sau: Xác định mặt phẳng (P) đi qua b và vuông góc với a, giao điểm của a và (P) là H, hình chiếu của H trên b là K. Khi đó, HK là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a, b và d(a, b) = HK (Hình 38).



Hình 38

Ví dụ 6 Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 3a$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a) AB và $B'C'$; b) AA' và BC; c) BB' và $C'D'$.

Giải. (*Hình 39*)

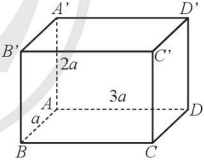
a) Vì $BB' \perp AB$ và $BB' \perp B'C'$ nên

$$d(AB, B'C') = BB' = AA' = 2a.$$

b) Vì $AB \perp AA'$ và $AB \perp BC$ nên $d(AA', BC) = AB = a$.

c) Vì $B'C' \perp BB'$ và $B'C' \perp C'D'$ nên

$$d(BB', C'D') = B'C' = AD = 3a.$$



Hình 39

C. BÀI TẬP

45. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3a$, $AD = 4a$.

a) Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC bằng:

A. $2,4a$. **B.** $3a$. **C.** $4a$. **D.** $5a$.

b) Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BD bằng:

A. $2,4a$. **B.** $3a$. **C.** $4a$. **D.** $5a$.

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng:

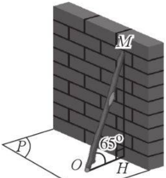
A. 2,4a. **B.** 3a.

C. 4a. **D.** 5a.

46. *Hình 40* minh hoạ hình ảnh một chiếc gậy dài 3 m đặt dựa vào tường, góc nghiêng giữa chiếc gậy và mặt đất là 65°. Đầu trên của chiếc gậy đặt vào vị trí M của tường. Khoảng cách từ vị trí M đến mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét) bằng:

A. 2,7 m. **B.** 2,8 m.

C. 2,9 m. **D.** 3,0 m.



Hình 40

47. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$, $SA = AB = 3a$, $BC = 4a$. Tính khoảng cách:

a) Từ điểm C đến mặt phẳng (SAB);

b) Giữa hai đường thẳng SA và BC;

c) Từ điểm A đến mặt phẳng (SBC);

d) Từ điểm B đến mặt phẳng (SAC);

e*) Giữa hai đường thẳng AB và SC.

48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $AD = 3a$, tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính khoảng cách:

a) Từ điểm C đến mặt phẳng (SAB);

b) Giữa hai đường thẳng SB và CD;

c) Giữa hai đường thẳng BC và SA;

d) Từ điểm S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, AC cắt BD tại O, $SO \perp (ABCD)$, $SA = 2a$. Tính khoảng cách:

a) Từ điểm A đến mặt phẳng (SBD);

b) Giữa hai đường thẳng SO và CD;

c) Từ điểm O đến mặt phẳng (SCD);

d*) Giữa hai đường thẳng AB và SD.

50. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $AA' \perp (ABCD)$, $AA' = 2a$, $AC = a$. Tính khoảng cách:

a) Từ điểm A đến mặt phẳng $(BCC'B')$;

b) Giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(CDD'C')$;

c*) Giữa hai đường thẳng BD và $A'C$.

§6 HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG. HÌNH CHÓP ĐỀU. THỂ TÍCH CỦA MỘT SỐ HÌNH KHỐI

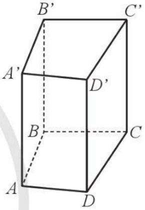
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hình lăng trụ đứng. Hình lăng trụ đều

• Hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy được gọi là *hình lăng trụ đứng.*

• Hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều gọi là *hình lăng trụ đều.*

• Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là *hình hộp đứng*.



Hình 41

Ví dụ: Hình 41 biểu diễn hình lăng trụ đứng tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$.

Nhận xét

– Mỗi mặt bên của hình lăng trụ đứng là một hình chữ nhật, mặt phẳng chứa nó vuông góc với mặt đáy.

– Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

Hình hộp chữ nhật có 6 mặt là hình chữ nhật.

Nếu mỗi mặt của hình hộp là hình chữ nhật thì hình hộp đó là hình hộp chữ nhật.

Độ dài các đường chéo của hình hộp chữ nhật là bằng nhau.

– Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các mặt là hình vuông.

Hình lập phương là hình lăng trụ tứ giác đều có cạnh bên bằng cạnh đáy.

2. Hình chóp đều. Hình chóp cụt đều

a) Hình chóp đều

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

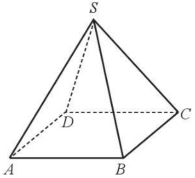
Chú ý

– Hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng cạnh đáy là tứ diện đều.

– Đoạn thẳng nối đỉnh với hình chiếu của đỉnh trên mặt đáy gọi là đường cao.

Ví dụ: Hình 42 biểu diễn hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$.

Nhận xét: Chân đường cao của hình chóp đều là tâm đường tròn ngoại tiếp của đáy.



Hình 42

b) Hình chóp cụt đều

Cho hình chóp đều $S.A_1A_2...A_n$. Mặt phẳng (P) song song với đáy của hình chóp và cắt các cạnh SA_1, SA_2, ..., SA_n lần lượt tại B_1, B_2, ..., B_n.

Phần của hình chóp đã cho giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và $(A_1A_2A_3...A_n)$ được gọi là *hình chóp cụt đều* $A_1A_2...A_n.B_1B_2...B_n$.

Trong hình chóp cụt đều $A_1A_2...A_n.B_1B_2...B_n$, ta gọi:

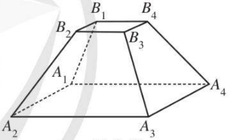
– Các đa giác $A_1A_2...A_n$, $B_1B_2...B_n$ lần lượt là đáy *lớn*, đáy nhỏ;

– Các tứ giác $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ là các *mặt bên*;

– Các đoạn thẳng A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n là các *cạnh bên*;

– Các cạnh của hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $B_1B_2...B_n$ là các *cạnh đáy*.

Ví dụ: Hình 43 biểu diễn hình chóp cụt tứ giác đều $A_1A_2A_3A_4.B_1B_2B_3B_4$.



Hình 43

Nhận xét:

– Hai đáy của hình chóp cụt đều nằm trên hai mặt phẳng song song và có các cạnh tương ứng song song; đồng thời hai đáy đó là các đa giác đều có cùng số cạnh;

– Mỗi mặt bên của hình chóp cụt đều là một hình thang cân;

– Các đường thẳng chứa cạnh bên của hình chóp cụt đều cùng đi qua một điểm;

– Đoạn thẳng nối tâm của hai đáy vuông góc với hai đáy của hình chóp cụt đều và gọi là đường cao.

3. Thể tích của một số hình khối

Phần không gian được giới hạn bởi một hình lăng trụ (kể cả hình lăng trụ ấy) được gọi là *khối lăng trụ*. Các khối khác được định nghĩa tương tự.

a) Thể tích của khối lăng trụ

• Chiều cao của khối lăng trụ bằng khoảng cách giữa hai mặt đáy.

• Thể tích của khối lăng trụ được tính theo công thức:

$$V = Sh,$$

trong đó h là chiều cao, S là diện tích đáy của khối lăng trụ.

b) Thể tích của khối chóp

• Chiều cao của khối chóp bằng khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy.

• Thể tích của khối chóp được tính theo công thức:

$$V = \frac{1}{3}Sh,$$

trong đó h là chiều cao, S là diện tích đáy của khối chóp.

c) Thể tích của khối chóp cụt đều

• Chiều cao của khối chóp cụt đều bằng khoảng cách giữa hai mặt đáy.

• Thể tích của khối chóp cụt đều được tính theo công thức:

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2),$$

trong đó h là chiều cao và S_1, S_2 lần lượt là diện tích hai đáy của khối chóp cụt đều.

B. VÍ DỤ

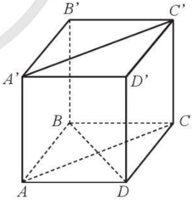
Vấn đề 1. Chứng minh quan hệ vuông góc trong không gian liên quan đến các hình khối đặc biệt

Ví dụ 1 Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $AC \perp (BDD'B')$.

Giải. (*Hình 44*)

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lăng trụ tứ giác đều nên $BB' \perp (ABCD)$. Mà $AC \subset (ABCD)$ nên $BB' \perp AC$.

Do $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$. Mà BB' và BD cắt nhau trong mặt phẳng $(BDD'B')$ nên $AC \perp (BDD'B')$.



Hình 44

Vấn đề 2. Tính góc, độ dài, khoảng cách và thể tích liên quan đến các hình khối đặc biệt

Ví dụ 2 Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, $SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

a) Tính chiều cao của khối chóp $S.ABCD$.

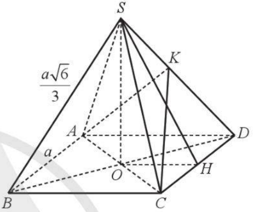
b) Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

c) Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$.

d) Tính côsin của số đo góc nhị diện $[S, CD, B]$.

e) Tính côsin của số đo góc nhị diện $[A, SD, C]$.

Giải. (*Hình 45*)



Hình 45

a) Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên

$$OA = OB = OC = OD,$$

suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp $ABCD$ nên O là chân đường cao của khối chóp $S.ABCD$.

Khi đó, chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ bằng SO.

Trong hình vuông $ABCD$, ta có:

$$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Xét tam giác SAO vuông tại O có:

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Vậy chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

b) Diện tích đáy $ABCD$ là: $S_{ABCD} = a^2$. Suy ra thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \,.\, SO = \frac{1}{3}a^2 \,.\, \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}.$$

c) Vì $SO \perp (ABCD)$ nên OA là hình chiếu của SA trên $(ABCD)$. Khi đó góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SAO}$.

Xét tam giác SAO vuông tại O có: $\cos\widehat{SAO} = \frac{AO}{SA} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\widehat{SAO} = 30°$. Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $30°$.

d) Gọi H là hình chiếu của O trên CD. Vì OCD là tam giác vuông cân tại O nên H là trung điểm CD. Mà tam giác SCD cân tại S nên $SH \perp CD$.

Suy ra $\widehat{SHO}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện [S, CD, B].

Xét tam giác DBC có OH là đường trung bình nên $OH = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$.

Xét tam giác SOH vuông tại O có:

$$SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}.$$

Suy ra $\cos\widehat{SHO} = \frac{OH}{SH} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{15}}{6} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

Vậy côsin của số đo góc nhị diện [S, CD, B] bằng $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

e) Gọi K là hình chiếu của A trên SD. Vì $AC \perp BD$, $AC \perp SO$ và BD, SO cắt nhau trong mặt phẳng (SBD) nên $AC \perp (SBD)$. Mà $SD \subset (SBD)$ nên $AC \perp SD$.

Ngoài ra, $SD \perp AK$ và AK, AC cắt nhau trong mặt phẳng (ACK) nên $SD \perp (ACK)$. Mà $CK \subset (ACK)$ nên $SD \perp CK$.

Từ đó ta có $\widehat{AKC}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện [A, SD, C].

Xét tam giác SCD có: $KC = \frac{SH\ .\ CD}{SD} = \frac{\frac{a\sqrt{15}}{6}\ .\ a}{\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{a\sqrt{15}}{6} . \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

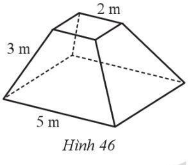
Tương tự ta có: $KA = \frac{a\sqrt{10}}{4}$. Xét tam giác AKC, ta có:

$$\cos\widehat{AKC} = \frac{KA^2 + KC^2 - AC^2}{2KA\ .\ KC} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{10}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{10}}{4}\right)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2}{2\ .\ \frac{a\sqrt{10}}{4}\ .\ \frac{a\sqrt{10}}{4}} = \frac{-3}{5}.$$

Vậy côsin của số đo góc nhị diện [A, SD, C] bằng $\frac{-3}{5}$.

Vấn đề 3. Ứng dụng

Ví dụ 3 Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cụt tứ giác đều (*Hình 46*). Cạnh đáy dưới dài 5 m, cạnh đáy trên dài 2 m, cạnh bên dài 3 m. Biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là 1 470 000 đồng/m^3. Tính số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp theo đơn vị đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn).



Hình 46

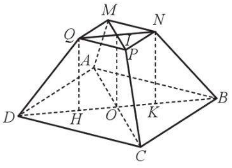
Giải. (*Hình 47*)

Giả sử chân tháp là khối chóp cụt tứ giác đều $ABCD.MNPQ$ với $ABCD$ là hình vuông cạnh 5 m, $MNPQ$ là hình vuông cạnh 2 m, $AM = BN = CP = DQ = 3$ m.

Vì DQ, NB cắt nhau nên D, Q, N, B đồng phẳng. Mà $(ABCD) // (MNPQ)$ nên $NQ // BD$.

Gọi I là giao điểm của MP và NQ, O là giao điểm của AC và BD. Khi đó $IO \perp (MNPQ)$, $IO \perp (ABCD)$.

Xét hình thang $QNBD$, gọi H là hình chiếu của Q trên BD, K là hình chiếu của N trên BD. Vì $IO \perp BD$, $QH \perp BD$, $NK \perp BD$ trong $(QNBD)$ nên $IO // QH // NK$.



Hình 47

Suy ra $QH \perp (MNPQ)$, $QH \perp (ABCD)$ nên QH bằng chiều cao của khối chóp cụt đều.

Ngoài ra, ta có $QH = NK = IO$ và $QD = NB$. Suy ra $\Delta QHD = \Delta NKB$ nên ta có $HD = BK$. Bên cạnh đó, $QNKH$ là hình chữ nhật nên $QN = HK$. Từ đó ta có:

$$HD = \frac{BD - HK}{2} = \frac{\sqrt{AD^2 + AB^2} - \sqrt{MN^2 + MQ^2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{5^2 + 5^2} - \sqrt{2^2 + 2^2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ (m)}.$$

Xét tam giác QHD vuông tại H có:

$$QH = \sqrt{QD^2 - HD^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ (m)}.$$

Diện tích của hai đáy là: $S_{ABCD} = AB^2 = 5^2 = 25 \text{ (m}^2\text{)}$,

$S_{MNPQ} = MN^2 = 2^2 = 4 \text{ (m}^2\text{)}$.

Suy ra thể tích của khối chóp cụt đều là:

$$V = \frac{1}{3}QH(S_{ABCD} + \sqrt{S_{ABCD} . S_{MNPQ}} + S_{MNPQ})$$

$$= \frac{1}{3} . \frac{3\sqrt{2}}{2}(25 + \sqrt{25 . 4} + 4) = \frac{39\sqrt{2}}{2} \text{ (m}^3\text{)}.$$

Số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp là:

$$1\,470\,000 . \frac{39\sqrt{2}}{2} \approx 40\,538\,000 \text{ (đồng)}.$$

BÀI TẬP

51. Một khối lăng trụ có diện tích đáy bằng $2a^2$ và có chiều cao bằng $3a$ thì có thể tích bằng:

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $6a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** a^3.

52. Một khối chóp có diện tích đáy bằng $2a^2$ và có chiều cao bằng $3a$ thì có thể tích bằng:

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $6a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** a^3.

53. Một khối chóp cụt đều có chiều cao bằng $6a$, diện tích của hai đáy lần lượt bằng $4a^2$ và $9a^2$ thì có thể tích bằng:

A. $38a^3$. **B.** $76a^3$. **C.** $114a^3$. **D.** $\frac{19a^3}{3}$.

54. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Tính:

a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD;

b) Chiều cao và thể tích của khối tứ diện đều $ABCD$;

c) Côsin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD);

d) Côsin của số đo góc nhị diện $[C, AB, D]$.

55. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính:

a) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$;

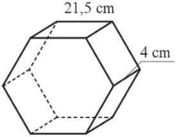
b) Số đo của góc nhị diện $[A, CD, B']$;

c) Tang của góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ABCD)$;

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng $C'D$ và BC;

e*) Góc giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

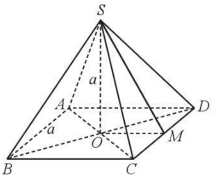
56. Người ta cần đổ bê tông để làm những viên gạch có dạng khối lăng trụ lục giác đều (*Hình 48*) với chiều cao là 4 cm và cạnh lục giác dài 21,5 cm. Tính thể tích bê tông theo đơn vị centimét khối để làm một viên gạch như thế (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 48

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

57. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, O là hình chiếu của S trên $(ABCD)$, $SO = a$. Gọi M là hình chiếu của O trên CD (*Hình 49*).



Hình 49

a) Đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

A. (SAB). **B**. (SAD).

C. (SBC). **D**. (SBD).

b) Số đo của góc nhị diện $[A, SO, M]$ bằng:

A. 30°. **B**.45°. **C**. 135°. **D**. 150°.

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SO và BC bằng:

A. a. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

d) Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A. a^3. **B.** $\frac{a^3}{2}$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $3a^3$.

e) Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SOM) bằng:

A. a. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

g) Côtang của góc giữa đường thẳng SM và $(ABCD)$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

58. Trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

(1): Trong không gian, hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

(2): Trong không gian, hai đường thẳng vuông góc với nhau thì cùng nằm trên một mặt phẳng.

(3): Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng thì nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

(4): Đường thẳng song song với một trong hai mặt phẳng vuông góc thì song song hoặc nằm trên mặt phẳng còn lại.

(5): Ba mặt phẳng đôi một vuông góc với nhau thì ba giao tuyến tạo thành cũng đôi một vuông góc với nhau.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

59. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$.

a) Chứng minh rằng $C'D \perp (BCD')$, $BD' \perp C'D$ và $(BC'D) \perp (BCD')$.

b) Tính góc giữa hai đường thẳng BD và $A'D'$.

c) Tính góc giữa đường thẳng BD và mặt phẳng $(CDD'C')$.

d) Tính số đo của góc nhị diện $[B, DD', C]$.

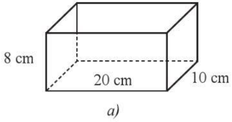
e) Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (BCD').

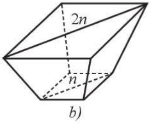
g) Chứng minh $B'C' \,//\, (BCD')$ và tính khoảng cách giữa đường thẳng $B'C'$ và mặt phẳng (BCD').

h) Tính thể tích của khối tứ diện $C'BCD$ và khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $(BC'D)$.

60. Một chì neo câu cá có dạng khối chóp cụt tứ giác đều được làm hoàn toàn bằng chì có khối lượng 137 g. Biết cạnh đáy nhỏ và cạnh đáy lớn của khối chóp cụt đều dài lần lượt 1 cm và 3 cm, khối lượng riêng của chì bằng 11,3 g/cm^3. Tính chiều cao của chì neo câu cá đó theo đơn vị centimét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

61*. Một chiếc khay đựng đầy nước có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước: chiều dài 20 cm, chiều rộng 10 cm, chiều cao 8 cm (*Hình 50a*). Để san bớt nước cho đỡ đầy, người ta đổ nước từ chiếc khay thứ nhất đó sang chiếc khay thứ hai có dạng hình chóp cụt tứ giác đều với đáy khay là hình vuông nhỏ có đường chéo dài n (cm), miệng khay là hình vuông lớn có đường chéo dài $2n$ (cm) (*Hình 50b*). Sau khi đổ, mực nước ở khay thứ hai cao bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của khay đó và lượng nước trong khay thứ nhất giảm đi $\frac{1}{4}$ so với ban đầu. Tính thể tích của chiếc khay thứ hai theo đơn vị centimét khối.





Hình 50

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

§1 HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

1. a) **C**. b) **D**. c) **A**.

2. Ba cặp đường thẳng vuông góc có thể là a và b; b và c; c và d.

3. (*Hình 51*)

a) Vì $ABB'A'$ là hình bình hành nên $AB \,//\, A'B'$.

Do $A'B'C'D'$ là hình vuông nên $A'D' \perp A'B'$.

Từ đó, suy ra $AB \perp A'D'$.

Vì $BDD'B'$ có $BB' \,//\, DD'$ và $BB' = DD'$ nên $BDD'B'$ là hình bình hành, suy ra $BD \,//\, B'D'$.

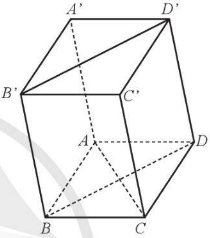
Mà $AC \perp BD$ do $ABCD$ là hình vuông. Như vậy, ta có $AC \perp B'D'$.

b) Xét hình vuông $ABCD$ có

$$(AC,\ AB) = \widehat{CAB} = 45°.$$

Mà $AB \,//\, A'B'$ nên $(AC, A'B') = (AC, AB) = 45°$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B'$ bằng $45°$.



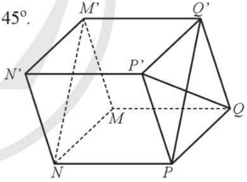
Hình 51

4. (*Hình 52*)

Vì $PQQ'P'$ là hình thoi (do các cạnh bằng nhau) nên $P'Q \perp PQ'$.

Do $NP = MQ = M'Q'$ và $NP \,//\, MQ \,//\, M'Q'$ nên $NPQ'M'$ là hình bình hành, suy ra $M'N \,//\, PQ'$.

Từ đó ta có $M'N \perp P'Q$.



Hình 52

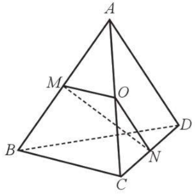
5*. (*Hình 53*)

Gọi O là trung điểm AC.

Vì OM, ON lần lượt là đường trung bình của hai tam giác ABC, CAD nên $OM \,//\, BC$, $ON \,//\, AD$ và

$$OM = \frac{1}{2}CB = a,\ \ ON = \frac{1}{2}AD = a.$$

Khi đó $(AD, BC) = (ON, OM)$.



Hình 53

Xét tam giác OMN có:

$$\cos\widehat{MON} = \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2OM\ .\ ON} = \frac{a^2 + a^2 - (a\sqrt{3})^2}{2a\ .\ a} = -\frac{1}{2}$$

nên $\widehat{MON} = 120°$.

Suy ra $(AD, BC) = (ON, OM) = 180° - 120° = 60°$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng $60°$.

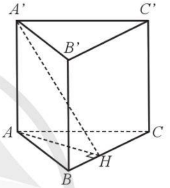
§2 ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

6. D. **7. A.** **8. B.** **9. D.** **10. D.**

11. (*Hình 54*)

Vì $AA' \perp (ABC)$ nên AH là hình chiếu của $A'H$ trên mặt phẳng (ABC).

Mà $BC \perp AH$ nên theo Định lí ba đường vuông góc, suy ra $BC \perp A'H$.



Hình 54

12. (*Hình 55*)

Gọi AN, CM là hai đường cao của tam giác ABC. Khi đó, H là giao điểm của AN và CM.

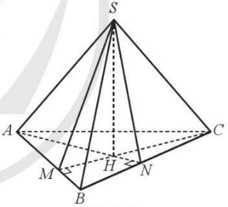
Theo giả thiết, $SA \perp SB$, $SA \perp SC$ mà SB, SC cắt nhau trong mặt phẳng (SBC) nên $SA \perp (SBC)$. Mà $BC \subset (SBC)$ nên $SA \perp BC$.

Ngoài ra, $AH \perp BC$ và SA, AH cắt nhau trong mặt phẳng (SAH) nên $BC \perp (SAH)$.

Mà $SH \subset (SAH)$ nên $BC \perp SH$.

Tương tự, ta có: $AB \perp SH$.

Bên cạnh đó, AB, BC cắt nhau trong mặt phẳng (ABC) nên $SH \perp (ABC)$.



Hình 55

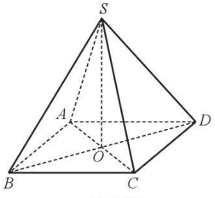
13. (*Hình 56*)

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm của AC và BD.

Xét tam giác SAC cân tại S có SO là đường trung tuyến nên SO là đường cao, suy ra $SO \perp AC$.

Xét tam giác SBD cân tại S có SO là đường trung tuyến nên SO là đường cao, suy ra $SO \perp BD$.

Mà AC, BD cắt nhau trong mặt phẳng $(ABCD)$. Do đó $SO \perp (ABCD)$.



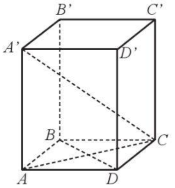
Hình 56

14. (*Hình 57*)

a) Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $AA' \parallel BB'$. Mà $AA' \perp (ABCD)$ nên $BB' \perp (ABCD)$. Ngoài ra, ta cũng có

$(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$ nên $BB' \perp (A'B'C'D')$.

b) Vì $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$. Do $AA' \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của $A'C$ trên mặt phẳng $(ABCD)$. Theo định lí ba đường vuông góc suy ra $BD \perp A'C$.



Hình 57

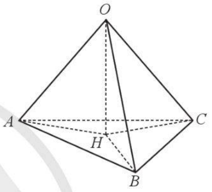
15. (*Hình 58*)

Vì H không thuộc các đường thẳng AB, BC, CA nên HA, HB, HC đôi một cắt nhau.

Theo giả thiết, $OH \perp HA$, $OH \perp HB$ mà HA, HB cắt nhau nên $OH \perp (HAB)$. Tương tự, $OH \perp (HBC)$.

Vì (HAB) và (HBC) cùng đi qua H và vuông góc với OH nên hai mặt phẳng đó trùng nhau.

Suy ra H thuộc mặt phẳng (ABC).



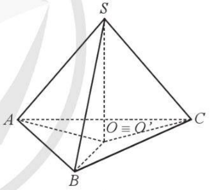
Hình 58

16. (*Hình 59*)

Gọi O' là hình chiếu của S trên (ABC). Khi đó, $SO' \perp (ABC)$. Mà $O'A$, $O'B$, $O'C$ đều nằm trên (ABC) nên $SO' \perp OA$, $SO' \perp OB$, $SO' \perp OC$.

Xét ba tam giác $SO'A$, $SO'B$, $SO'C$ vuông tại O' có $SA = SB = SC$ và SO' chung nên ba tam giác đó bằng nhau. Do đó, $O'A = O'B = O'C$.

Suy ra O' là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC hay O' trùng O. Vậy $SO \perp (ABC)$.

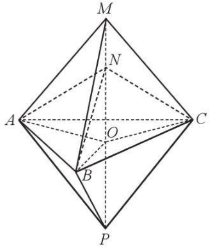


Hình 59

17. (*Hình 60*)

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

Giả sử ba điểm M, N, P đều không thuộc mặt phẳng (ABC), áp dụng kết quả Bài 16 cho ba hình chóp $M.ABC$, $N.ABC$, $P.ABC$ ta có $MO \perp (ABC)$, $NO \perp (ABC)$, $PO \perp (ABC)$. Do đó ba đường thẳng MO, NO, PO trùng nhau hay M, N, P thẳng hàng.



Hình 60

Giả sử trong ba điểm M, N, P có một điểm nằm trên (ABC). Khi đó, theo giả thiết ta có điểm đó trùng O. Như vậy, cùng với kết quả trên ta có ba điểm M, N, P thẳng hàng.

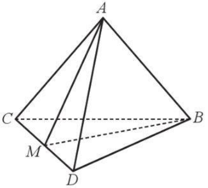
18. (*Hình 61*)

Gọi M là trung điểm của CD.

Vì $ABCD$ là hình tứ diện đều nên hai tam giác ACD và BCD là các tam giác đều.

Suy ra $AM \perp CD$, $BM \perp CD$.

Mà AM, BM cắt nhau trong mặt phẳng (ABM) nên $CD \perp (ABM)$. Ngoài ra, $AB \subset (ABM)$. Do đó, ta có $AB \perp CD$.



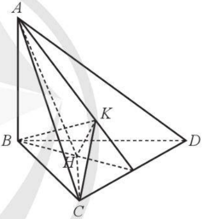
Hình 61

19. (*Hình 62*)

a) Vì $AB \perp (BCD)$, $CH \subset (BCD)$ nên $AB \perp CH$.

Do H là trực tâm của tam giác (BCD) nên $CH \perp BD$. Mà AB, BD cắt nhau trong mặt phẳng (ABD) nên $CH \perp (ABD)$. Ngoài ra, $AD \subset (ABD)$ nên $AD \perp CH$.

b*) Vì K là trực tâm của tam giác (ACD) nên $CK \perp AD$. Mà CK, CH cắt nhau trong mặt phẳng (CHK) nên $AD \perp (CHK)$. Ngoài ra, $HK \subset (CHK)$ nên $AD \perp HK$. Áp dụng kết quả của Ví dụ 7 trang 93, ta có $CD \perp HK$. Bên cạnh đó, AC, CD cắt nhau trong mặt phẳng (ACD) nên $HK \perp (ACD)$.



Hình 62

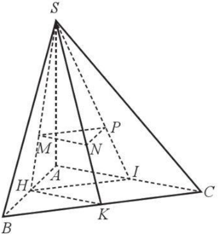
20. (*Hình 63*)

Gọi H, K, I lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Theo giả thiết ta có:

$$\frac{SM}{SH} = \frac{SN}{SK} = \frac{SP}{SI} = \frac{2}{3}.$$

Do đó, trong tam giác SHK có $MN \parallel HK$, trong tam giác SHI có $MP \parallel HI$. Mà $HK \subset (ABC)$, $HI \subset (ABC)$ nên $MN \parallel (ABC)$, $MP \parallel (ABC)$.

Ngoài ra, MN, MP cắt nhau trong mặt phẳng (MNP) nên $(MNP) \parallel (ABC)$. Mà $SA \perp (ABC)$. Vậy $SA \perp (MNP)$.



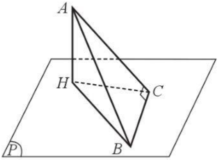
Hình 63

21. Gọi O là hình chiếu của S trên $(ABCD)$. Chứng minh tương tự Bài 16, ta có $OA = OB = OC = OD$.

Suy ra O là tâm đường tròn đi qua bốn đỉnh tứ giác $ABCD$.

22*. (*Hình 64*)

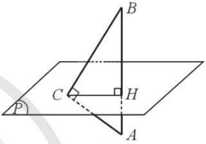
Gọi H là hình chiếu của A trên (P). Khi đó H cố định và HC là hình chiếu của AC trên (P). Vì $BC \perp AC$ nên theo Định lí ba đường vuông góc ta có $BC \perp HC$. Do đó C chuyển động trên đường tròn đường kính HB cố định nằm trong (P).



Hình 64

23*. (*Hình 65*)

Vì $AC \perp CB$ nên A, B, C không thẳng hàng. Do $AB \perp (P)$, $HC \subset (P)$ nên $AB \perp HC$. Ta có ΔHBC đồng dạng ΔHCA nên $HC^2 = HA \,.\, HB$, suy ra $HC = \sqrt{4 \,.\, 9} = 6$ (cm). Vậy C thuộc đường tròn tâm H bán kính 6 cm trong (P).



Hình 65

§3 GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG. GÓC NHỊ DIỆN

24. C. **25. B.** **26. D.**

27. (*Hình 66*)

a) Vì $SA \perp (ABC)$, $AB \subset (ABC)$, $AC \subset (ABC)$ nên $SA \perp AB$, $SA \perp AC$. Suy ra góc BAC là góc phẳng nhị diện của $[B, SA, C]$, hay $\widehat{BAC} = \alpha$. Xét tam giác ABC vuông tại B có:

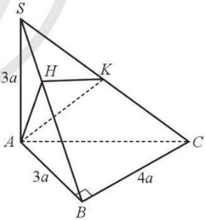
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a$$

và $\cos\alpha = \cos\widehat{BAC} = \dfrac{BA}{AC} = \dfrac{3a}{5a} = \dfrac{3}{5}$.

Ta có $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp SB$ suy ra góc SBA là góc phẳng nhị diện của $[A, BC, S]$. Như vậy, ta có:

$$SB = \sqrt{AB^2 + SA^2} = \sqrt{(3a)^2 + (3a)^2} = 3\sqrt{2}a$$

và $\cos\beta = \cos\widehat{SBA} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{3a}{3\sqrt{2}a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



Hình 66

b*) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Ta có $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp AH$. Mà $AH \perp SB$ nên $AH \perp (SBC)$, suy ra $AH \perp SC$. Mà $SC \perp AK$ nên

$SC \perp (AHK)$, suy ra $SC \perp HK$. Do đó góc AKH là góc phẳng nhị diện của $[A, SC, B]$, hay $\widehat{AKH} = \gamma$.

Tam giác SAB vuông tại A có: $AH = \dfrac{SA \,.\, AB}{SB} = \dfrac{3a \,.\, 3a}{3a\sqrt{2}} = \dfrac{3a}{\sqrt{2}}$.

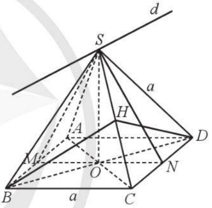
Tam giác SAC vuông tại A có: $AK = \dfrac{SA \,.\, AC}{SC} = \dfrac{3a \,.\, 5a}{\sqrt{(3a)^2 + (5a)^2}} = \dfrac{15a}{\sqrt{34}}$.

Tam giác AHK vuông tại H (vì $AH \perp (SBC)$ mà $HK \subset (SBC)$) có:

$$HK = \sqrt{AK^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\frac{15a}{\sqrt{34}}\right)^2 - \left(\frac{3a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{6a}{\sqrt{17}}$$

và $\cos\gamma = \cos\widehat{AKH} = \dfrac{HK}{AK} = \dfrac{\dfrac{6a}{\sqrt{17}}}{\dfrac{15a}{\sqrt{34}}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.

28. (*Hình 67*)



Hình 67

a) Vì $BO \perp AC$, $BO \perp SO$ nên $BO \perp (SAC)$. Suy ra góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng góc BSO. Xét tam giác SBD có $SB = SD$ và $SB^2 + SD^2 = BD^2$ nên tam giác SBD vuông cân tại S. Suy ra $\widehat{BSO} = 45°$, hay góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $45°$.

b) Gọi N là hình chiếu của S trên CD. Khi đó, số đo của $[S, CD, A]$ bằng $\widehat{SNO}$, hay $\widehat{SNO} = \alpha$. Ta có:

$$\cos\alpha = \frac{ON}{SN} = \frac{\dfrac{a}{2}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

c) Gọi M là hình chiếu của S trên AB. Vì $AB \,//\, CD$ nên $d \,//\, AB$ và $d \,//\, CD$. Khi đó $SM \perp d$, $SN \perp d$. Suy ra số đo của $[A, d, D]$ bằng $\widehat{MSN}$, hay $\widehat{MSN} = \beta$.

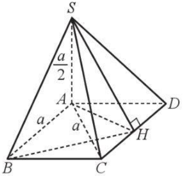
Ta có: $\cos\beta = \dfrac{SM^2 + SN^2 - MN^2}{2SM \,.\, SN} = \dfrac{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - a^2}{2 \,.\, \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \,.\, \dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{3}$.

d*) Gọi H là hình chiếu của B trên SC. Vì $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp SC$. Suy ra $SC \perp (BHD)$ nên $SC \perp HD$. Vậy số đo của $[B, SC, D]$ bằng $\widehat{BHD}$, hay $\widehat{BHD} = \gamma$.

Vì hai tam giác SBC, SCD đều nên $BH = DH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Khi đó, ta có:

$$\cos\gamma = \frac{HB^2 + HD^2 - BD^2}{2HB\,.\,HD} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (a\sqrt{2})^2}{2\,.\,\frac{a\sqrt{3}}{2}\,.\,\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{3}.$$

29. (*Hình 68*)



Hình 68

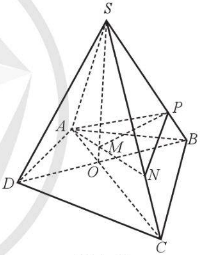
Gọi H là hình chiếu của A trên CD. Khi đó, $AH \perp CD$. Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp CD$. Suy ra $CD \perp (SAH)$. Khi đó, $SH \perp CD$. Như vậy, số đo của $[S, CD, A]$ bằng $\widehat{SHA}$. Ta có:

$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ SA = \frac{a}{2}$$

nên $$\tan\widehat{SHA} = \frac{SA}{AH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy số đo của góc nhị diện $[S, CD, A]$ bằng $\widehat{SHA} = 30°$.

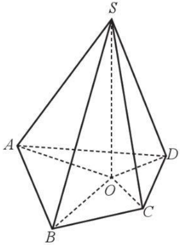
30*. (*Hình 69*)



Hình 69

Trong mặt phẳng (SAC), lấy đường thẳng AN ($N \in SC$) sao cho $AN \perp SO$. Gọi M là giao điểm của AN và SO. Trong mặt phẳng (SOB), lấy đường thẳng MP ($P \in SB$) sao cho $MP \perp SO$. Khi đó, số đo của $[A, SO, B]$ bằng $\widehat{AMP}$, hay $\widehat{AMP} = \alpha$ và số đo của $[B, SO, C]$ bằng $\widehat{PMN}$, hay $\widehat{PMN} = \beta$. Trong mặt phẳng (APN) có A, M, N thẳng hàng nên $\alpha + \beta = 180°$.

31*. (*Hình 70*)



Hình 70

Gọi O là hình chiếu của S trên $(ABCD)$. Khi đó, ta có: $\alpha_1 = \widehat{SAO}$, $\alpha_2 = \widehat{SBO}$, $\alpha_3 = \widehat{SCO}$, $\alpha_4 = \widehat{SDO}$. Các tam giác SAO, SBO, SCO, SDO vuông có các góc $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ đều nhỏ hơn $90°$ nên

$$\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = \sin\alpha_3 = \sin\alpha_4$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4.$$

Như vậy, $SA = SB = SC = SD \Leftrightarrow \dfrac{SO}{SA} = \dfrac{SO}{SB} = \dfrac{SO}{SC} = \dfrac{SO}{SD}$

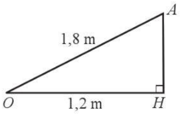
$$\Leftrightarrow \sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = \sin\alpha_3 = \sin\alpha_4$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4.$$

32. (*Hình 71*)

Vẽ OA biểu diễn cho ống hấp nhiệt chân không, OH biểu diễn bóng nắng (hình chiếu vuông góc do tia nắng chiếu vuông góc với mặt sân) của ống đó trên mặt sân. Như vậy góc giữa ống hấp nhiệt chân không với mặt sân bằng $\widehat{AOH}$. Ta có:

$$\cos\widehat{AOH} = \frac{OH}{OA} = \frac{1,2}{1,8} = \frac{2}{3} \Rightarrow \widehat{AOH} \approx 48°.$$



Hình 71

Vậy góc giữa ống hấp nhiệt chân không với mặt sân thượng bằng khoảng 48°.

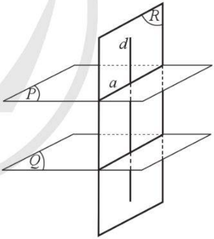
§4 HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

33. C. **34. A.** **35. D.** **36. A.**

37. Hai cặp mặt phẳng vuông góc với nhau có thể là (P) và (S), (Q) và (S).

38. a) (*Hình 72*)

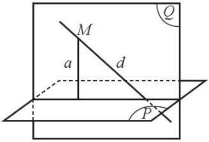
Gọi (P), (Q), (R) là ba mặt phẳng thoả mãn $(P) \mathbin{//} (Q)$, $(P) \perp (R)$. Gọi a là giao tuyến của (P) và (R). Lấy đường thẳng d nằm trong (R) sao cho $d \perp a$. Khi đó, $d \perp (P)$. Mà $(P) \mathbin{//} (Q)$ nên $d \perp (Q)$. Như vậy $(R) \perp (Q)$.



Hình 72

b) Xét đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (P). Giả sử d cắt (P) (*Hình 73*). Lấy M thuộc d, đường thẳng a qua M và vuông góc với (P). Khi đó, hai đường thẳng a và d xác định mặt phẳng (Q) sao cho $(Q) \perp (P)$.

Các trường hợp $d \subset (P)$ và $d \mathbin{//} (P)$ xác định mặt phẳng (Q) tương tự.



Hình 73

Giả sử tồn tại mặt phẳng (Q') khác (Q) sao cho $d \subset (Q')$ và $(Q') \perp (P)$. Khi đó, d là giao tuyến của (Q) và (Q'), đồng thời $d \perp (P)$. Mâu thuẫn với giả thiết d không vuông góc với (P). Vậy tồn tại duy nhất mặt phẳng (Q) sao cho $d \subset (Q)$ và $(P) \perp (Q)$.

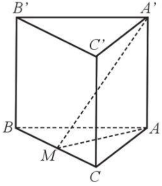
39. (*Hình 74*)

Vì $AA' \parallel BB'$ và $AA' \perp (ABC)$ nên $BB' \perp (ABC)$, suy ra $BB' \perp AM$.

Do tam giác ABC cân tại A và M là trung điểm của BC nên $AM \perp BC$.

Từ đó suy ra $AM \perp (BCC'B')$.

Mà $AM \subset (MAA')$ nên $(MAA') \perp (BCC'B')$.

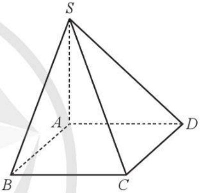


Hình 74

40. (*Hình 75*)

a) Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $BC \perp AB$. Do $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BC$. Từ đó suy ra $BC \perp (SAB)$. Mà $BC \subset (SBC)$ nên $(SAB) \perp (SBC)$.

b) Chứng minh tương tự câu a.



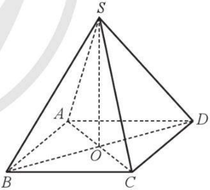
Hình 75

41. (*Hình 76*)

Vì $(SAC) \perp (ABCD)$, $(SBD) \perp (ABCD)$ và $SO = (SAC) \cap (SBD)$ nên $SO \perp (ABCD)$. Suy ra $SO \perp AC$.

Vì $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$. Từ đó suy ra $AC \perp (SBD)$.

Mà $AC \subset (SAC)$ nên $(SAC) \perp (SBD)$.



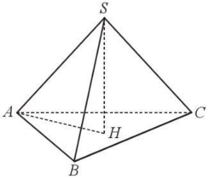
Hình 76

42. (*Hình 77*)

Theo giả thiết ta có $SA \perp SB$, $SA \perp SC$ nên $SA \perp (SBC)$. Suy ra $SA \perp BC$.

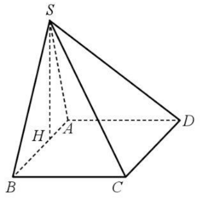
Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên $AH \perp BC$. Suy ra $BC \perp (SAH)$.

Mà $BC \subset (ABC)$ nên $(SAH) \perp (ABC)$.



Hình 77

43. (*Hình 78*)



Hình 78

a) Gọi H là hình chiếu của S trên AB.

Vì $(SAB) \perp (ABCD)$, $SH \perp AB$, $SH \subset (SAB)$ nên $SH \perp (ABCD)$. Suy ra $SH \perp AD$.

Do $ABCD$ là hình vuông nên $AD \perp AB$. Suy ra $AD \perp (SAB)$.

Mà $AD \subset (SAD)$ nên $(SAD) \perp (SAB)$.

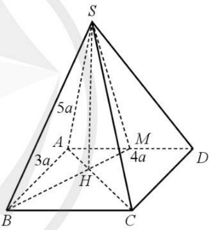
b) Chứng minh tương tự câu a.

c) Vì $AD \perp (SAB)$ nên $AD \perp SB$. Do tam giác SAB vuông tại S nên $SA \perp SB$. Suy ra $SB \perp (SAD)$.

Mà $SB \subset (SBC)$ nên $(SAD) \perp (SBC)$.

44*. (*Hình 79*)

Gọi H là giao điểm của BM và AC. Vì $(SAC) \perp (ABCD)$, $(SBM) \perp (ABCD)$ và $SH = (SAC) \cap (SBM)$ nên $SH \perp (ABCD)$.



Hình 79

Khi đó, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\widehat{SAH}$. Ta có:

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a.$$

Vì $AM \parallel BC$ nên $\dfrac{AH}{HC} = \dfrac{AM}{BC} = \dfrac{1}{2}$

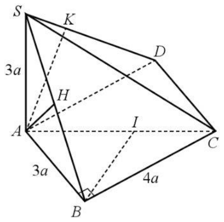
$$\Rightarrow AH = \frac{1}{2}HC \Rightarrow AH = \frac{1}{3}AC = \frac{5a}{3}.$$

Vậy $\cos\varphi = \cos\widehat{SAH} = \dfrac{AH}{SA} = \dfrac{1}{3}$.

§5 KHOẢNG CÁCH

45. a) **B**. b) **A**. c) **C**. **46.** **A**.

47. (*Hình 80*)



Hình 80

a) $d(C, (SAB)) = BC = 4a$.

b) $d(SA, BC) = AB = 3a$.

c) Gọi H là hình chiếu của A trên SB. Khi đó, $AH \perp (SBC)$. Suy ra $d(A, (SBC)) = AH = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

d) Gọi I là hình chiếu của B trên AC. Khi đó, $BI \perp (SAC)$. Suy ra

$$d(B, (SAC)) = BI = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{3a \cdot 4a}{5a} = 2,4a.$$

e*) Lấy điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành, gọi K là hình chiếu của A trên SD. Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật do $AB \perp BC$. Suy ra $CD \perp (SAD)$ nên $CD \perp AK$. Do đó, $AK \perp (SDC)$.

Vì $AB \parallel (SCD)$ nên $d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AK$.

Xét tam giác SAD vuông tại A có: $AK = \dfrac{SA \cdot AD}{SD} = \dfrac{3a \cdot 4a}{\sqrt{(3a)^2 + (4a)^2}} = 2,4a.$

Vậy $d(AB, SC) = 2,4a$.

48. (*Hình 81*)

a) $d(C, (SAB)) = BC = 3a$.

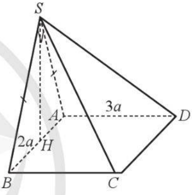
b) Vì $CD \parallel (SAB)$ nên

$$d(SB, CD) = d(CD, (SAB)) = BC = 3a.$$

c) Vì $BC \parallel (SAD)$ nên $d(BC, SA) = d(B, (SAD))$.

Vì $SB \perp SA$, $SB \perp AD$ nên $SB \perp (SAD)$, suy ra $d(B, (SAD)) = SB$. Ta có:

$$AB^2 = 2SB^2 \Rightarrow SB = \sqrt{\frac{AB^2}{2}} = \sqrt{\frac{(2a)^2}{2}} = a\sqrt{2}.$$



Hình 81

Vậy $d(BC, SA) = a\sqrt{2}$.

d) Gọi H là trung điểm AB. Vì tam giác SAB cân nên $SH \perp AB$.

Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$. Vậy $d(S, (ABCD)) = SH = \dfrac{AB}{2} = a$.

49. (*Hình 82*)

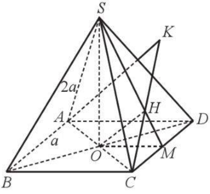
a) $d(A, (SBD)) = AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Gọi M là hình chiếu của O trên CD. Khi đó,

$$d(SO, CD) = OM = \frac{a}{2}.$$

c) Gọi H là hình chiếu của O trên SM. Khi đó, $OH \perp (SCD)$ nên $d(O, (SCD)) = OH$. Ta có:

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$$



Hình 82

và $OH = \dfrac{SO\ .\ OM}{SM} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{14}}{2}\ .\ \dfrac{a}{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{14}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{210}}{30}.$

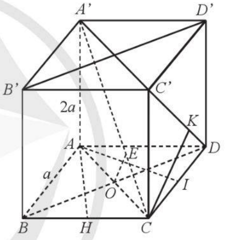
d*) Vì AB // (SCD) nên $d(AB, SD) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD))$. Gọi K là hình chiếu của A trên (SCD). Vì H là hình chiếu của O trên (SCD) mà C, O, A thẳng hàng nên C, H, K thẳng hàng. Ngoài ra, ta có OH // AK. Do đó, $\dfrac{OH}{AK} = \dfrac{OC}{AC} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $d(AB, SD) = d(A, (SCD)) = AK = 2OH = \dfrac{a\sqrt{210}}{15}$.

50. (*Hình 83*)

a) Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Khi đó, $AH \perp (BCC'B')$. Vì tam giác ABC đều cạnh a nên $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d(A, (BCC'B')) = AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Hình 83

b) Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên

$$(ABB'A') \,//\, (CDD'C').$$

Gọi I là hình chiếu của A trên CD. Vì tam giác ACD đều cạnh a nên $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó, $d((ABB'A'), (CDD'C')) = AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

c*) Gọi E là hình chiếu của O trên $A'C$. Vì $BD \perp (A'AC)$ nên $BD \perp OE$. Suy ra $d(BD, A'C) = OE$. Ta có:

$$A'C = \sqrt{A'A^2 + AC^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}.$$

Vì $\Delta CEO \backsim \Delta CAA'$ nên

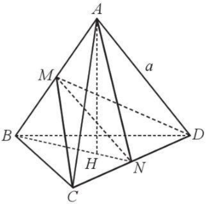
$$\frac{OE}{AA'} = \frac{OC}{A'C} \Rightarrow OE = \frac{AA'\ .\ OC}{A'C} = \frac{2a\ .\ \dfrac{a}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy $d(BD, A'C) = OE = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

§6 HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG. HÌNH CHÓP ĐỀU. THỂ TÍCH CỦA MỘT SỐ HÌNH KHỐI

51. B. **52. C.** **53. A.**

54. (*Hình 84*)



Hình 84

a) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Vì tứ diện $ABCD$ đều nên các tam giác ABC và ABD đều. Suy ra $CM \perp AB$, $DM \perp AB$ nên $AB \perp (CDM)$. Do đó, $AB \perp MN$. Tương tự ta có $CD \perp MN$. Vậy MN là đoạn vuông góc chung của AB, CD. Ta có:

$$MN = \sqrt{MC^2 - NC^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $d(AB, CD) = MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Gọi H là hình chiếu của A trên (BCD). Khi đó, H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Vì tam giác BCD đều nên H thuộc BN và $BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Ta có:

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

hay chiều cao của khối tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Diện tích của tam giác BCD là $S_{BCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Vậy thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} . S_{BCD} . AH = \frac{1}{3} . \frac{a^2\sqrt{3}}{4} . \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

c) Côsin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) bằng:

$$\cos\widehat{ABH} = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

d) Vì $CM \perp AB$, $DM \perp AB$ nên số đo của góc nhị diện $[C, AB, D]$ bằng $\widehat{CMD}$.

Ta có: $\cos\widehat{CMD} = \dfrac{CM^2 + DM^2 - CD^2}{2CM . DM} = \dfrac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - a^2}{2 . \frac{a\sqrt{3}}{2} . \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{3}$.

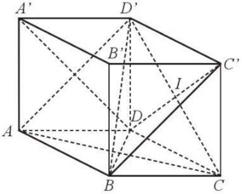
Vậy côsin của số đo góc nhị diện $[C, AB, D]$ bằng $\frac{1}{3}$.

55. (*Hình 85*)

a) $d((ABCD), (A'B'C'D')) = a$.

b) Vì $A'B' // DC$ nên A', B', C, D đồng phẳng. Khi đó, góc nhị diện $[A, CD, B']$ là $[A, CD, A']$. Ta có $AD \perp DC$, $A'D \perp DC$. Số đo của góc nhị diện $[A, CD, B']$ bằng $\widehat{ADA'} = 45°$.

c) Vì $DD' \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\widehat{D'BD}$.



Hình 85

Khi đó, tang của góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

$$\tan \widehat{D'BD} = \frac{D'D}{BD} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

d) Gọi I là giao điểm của CD' và $C'D$. Khi đó $IC \perp BC$, $IC \perp C'D$. Suy ra

$$d(C'D, BC) = IC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

e*) Vì $BC' // AD'$ nên góc giữa hai đường thẳng BC' và CD' bằng góc giữa hai đường thẳng AD' và CD'. Vì tam giác $AD'C$ đều cạnh $a\sqrt{2}$ nên $\widehat{AD'C} = 60°$. Vậy góc giữa hai đường thẳng BC' và CD' bằng $60°$.

56. Chia hình lục giác đều trên hai mặt đáy thành 6 hình tam giác đều cạnh 21,5 cm.

Khi đó diện tích đáy của viên gạch bằng: $6 \cdot \frac{(21,5)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{5\,547\sqrt{3}}{8}$ (cm^2).

Thể tích bê tông cần dùng bằng thể tích viên gạch, tức là:

$$4 \cdot \frac{5\,547\sqrt{3}}{8} \approx 4\,803,8 \ (cm^3).$$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

57. a) **D**. b) **C**. c) **B**. d) **C**. e) **B**. g) **A**. **58. A.**

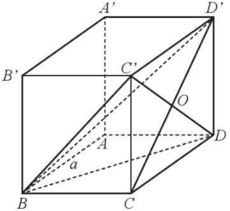
59. (*Hình 86*)

a) Vì $BC \perp (CDD'C')$ nên $BC \perp C'D$. Mà $C'D \perp CD'$ nên $C'D \perp (BCD')$. Suy ra $C'D \perp BD'$ và $(BC'D) \perp (BCD')$.

b) Ta có: $(BD, A'D') = (BD, AD) = \widehat{BDA} = 45°$.

c) Góc giữa đường thẳng BD và mặt phẳng $(CDD'C')$ bằng $(BD, CD) = \widehat{BDC} = 45°$.

d) Vì $DD' \perp (BCD)$ nên $DD' \perp BD$, $DD' \perp CD$. Suy ra số đo của góc nhị diện $[B, DD', C]$ bằng $(BD, CD) = 45°$.



Hình 86

e) Gọi O là giao điểm của $C'D$ và CD'. Vì $DO \perp BC$, $DO \perp CD'$ nên $DO \perp (BCD')$. Vậy

$$d(D, (BCD')) = DO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

g) Vì $B'C' \parallel BC$ nên $B'C' \parallel (BCD')$. Khi đó, $d(B'C', (BCD')) = d(C', (BCD'))$.

Vì $C'O \perp (BCD')$ nên $d(B'C', (BCD')) = C'O = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

h) Thể tích khối tứ diện $C'BCD$ bằng

$$V_{C'BCD} = \frac{1}{3} . CC' . \left(\frac{1}{2} BC . CD\right) = \frac{1}{3} . a . \left(\frac{1}{2} . a . a\right) = \frac{a^3}{6}.$$

Diện tích tam giác đều $BC'D$ cạnh $a\sqrt{2}$ bằng: $S_{BC'D} = \dfrac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Xét khối tứ diện $C'BCD$ có C là đỉnh, $BC'D$ là đáy thì khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $(BC'D)$ bằng:

$$d(C, (BC'D)) = \frac{3V_{C'BCD}}{S_{BC'D}} = \frac{3 . \frac{a^3}{6}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

60. Thể tích của chì neo câu cá bằng $V = \dfrac{137}{11,3}$ (cm^3).

Vậy chiều cao của chì neo câu cá bằng

$$h = \frac{3V}{1^2 + \sqrt{1^2 . 3^2} + 3^2} = \frac{3 . \frac{137}{11,3}}{13} \approx 2,8 \text{ (cm)}.$$

61*. Thể tích nước có trong khay thứ nhất trước khi đổ bằng

$$20 . 10 . 8 = 1\ 600 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

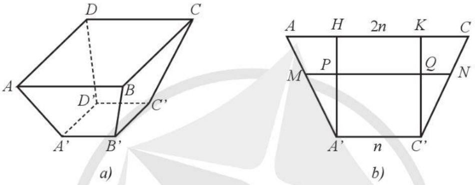
Sau khi đổ, thể tích nước có trong khay thứ hai bằng

$$1\,600 \cdot \frac{1}{4} = 400 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Gọi chiều cao của khay thứ hai là h (cm).

Giả sử khay thứ hai có dạng hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ (*Hình 87a*).

Xét hình thang $ACC'A'$, lấy MN song song với AC; H, K lần lượt là hình chiếu của A', C' trên AC; P, Q lần lượt là giao điểm của $A'H$ và MN, $C'K$ và MN (*Hình 87b*).



Hình 87

Theo giả thiết, mực nước (ngang với MN) trong khay thứ hai cao bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của khay đó, suy ra

$$\frac{A'P}{A'H} = \frac{C'Q}{C'K} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{MP}{AH} = \frac{NQ}{CK} = \frac{2}{3}.$$

Ta có: $AH = CK = \frac{n}{2}$, $HK = n$, nên $MN = \frac{5}{3}n$. Thể tích của nước trong khay thứ hai bằng thể tích khối chóp cụt tứ giác đều với đáy lớn nhận MN là đường chéo và đáy nhỏ nhận $A'C'$ là đường chéo, chiều cao bằng $\frac{2}{3}h$. Vì thể tích nước trong khay thứ hai bằng 400 cm^3 nên ta có

$$\frac{1}{3}\left[\frac{\left(\frac{5}{3}n\right)^2}{2} + \sqrt{\frac{\left(\frac{5}{3}n\right)^2}{2} \cdot \frac{n^2}{2}} + \frac{n^2}{2}\right] \cdot \frac{2}{3}h = \frac{49}{81}n^2h = 400 \Rightarrow n^2h = \frac{32\,400}{49}.$$

Thể tích của chiếc khay thứ hai bằng

$$V = \frac{h}{3}\left[\frac{(2n)^2}{2} + \sqrt{\frac{(2n)^2}{2} \cdot \frac{n^2}{2}} + \frac{n^2}{2}\right] = \frac{7}{6}n^2h = \frac{7}{6} \cdot \frac{32\,400}{49} = \frac{5\,400}{7} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

MỤC LỤC

Mang cuộc sống vào bài học
Đưa bài học vào cuộc sống

BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 11
Cánh Diều

I. MÔN HỌC VÀ HOẠT ĐỘNG GIÁO DỤC BẮT BUỘC	
1	Ngữ văn 11 (Tập một, Tập hai)
2	Toán 11 (Tập một, Tập hai)
3	Lịch sử 11
4	Tiếng Anh 11 Explore New Worlds
5	Giáo dục quốc phòng và an ninh 11
6	Giáo dục thể chất 11 - Bóng đá
	Giáo dục thể chất 11 - Bóng rổ
	Giáo dục thể chất 11 - Cầu lông
	Giáo dục thể chất 11 - Đá cầu
7	Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 11
II. MÔN HỌC LỰA CHỌN	
1	Địa lí 11
2	Giáo dục kinh tế và pháp luật 11
3	Vật lí 11
4	Hoá học 11
5	Sinh học 11
6	Công nghệ 11 - Công nghệ chăn nuôi
	Công nghệ 11 - Công nghệ cơ khí
7	Tin học 11 - Khoa học máy tính
	Tin học 11 - Tin học ứng dụng
8	Âm nhạc 11
III. CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP LỰA CHỌN	
1	Chuyên đề học tập Ngữ văn 11
2	Chuyên đề học tập Toán 11
3	Chuyên đề học tập Lịch sử 11
4	Chuyên đề học tập Địa lí 11
5	Chuyên đề học tập Giáo dục kinh tế và pháp luật 11
6	Chuyên đề học tập Vật lí 11
7	Chuyên đề học tập Hoá học 11
8	Chuyên đề học tập Sinh học 11
9	Chuyên đề học tập Công nghệ 11 - Công nghệ chăn nuôi
	Chuyên đề học tập Công nghệ 11 - Công nghệ cơ khí
10	Chuyên đề học tập Tin học 11 - Khoa học máy tính
	Chuyên đề học tập Tin học 11 - Tin học ứng dụng
11	Chuyên đề học tập Âm nhạc 11

TÌM ĐỌC: CÁC SÁCH BỔ TRỢ VÀ THAM KHẢO LỚP 11 (Cánh Diều) THEO TỪNG MÔN HỌC

SỬ DỤNG
TEM CHỐNG GIẢ

Quét mã QR hoặc dùng trình duyệt web để truy cập website bộ sách Cánh Diều: www.hoc10.com

ISBN: 978-604-54-6032-0
9 786045 460320