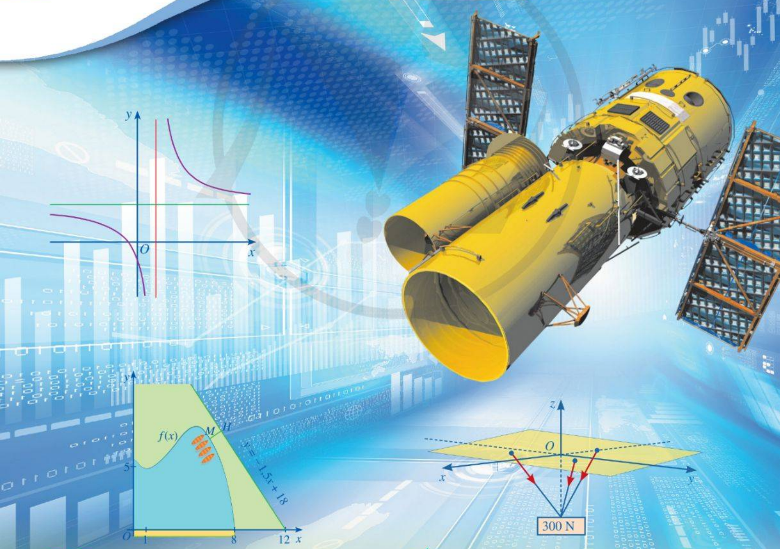
ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN
PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG

BÀI TẬP Toán 12

TẬP MỘT



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

Bản in thử

ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ
NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN – PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG

BÀI TẬP Toán 12

TẬP MỘT

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ
XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

Bản in thử

Lời nói đầu

Sách **Bài tập Toán 12** (gồm 2 tập) được biên soạn tương thích với sách giáo khoa Toán 12 (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên – GS.TSKH Đỗ Đức Thái). Nội dung hai cuốn sách hướng đến tạo cơ hội hình thành và phát triển năng lực toán học, phát huy hứng thú học tập, tính chủ động và tiềm năng của mỗi học sinh; bảo đảm tính tích hợp, phân hoá trong dạy học bộ môn Toán.

Nội dung mỗi bài trong sách được thể hiện qua các phần: Kiến thức cần nhớ – Ví dụ – Bài tập.

Các bài tập cơ bản gồm những bài tập giúp học sinh củng cố, kết nối các kiến thức cốt lõi, trọng tâm được học trong mỗi chủ đề. Ngoài ra, có những bài tập nâng cao (được đánh dấu *) ở mức độ vận dụng phát triển và gắn với một số ứng dụng của toán học trong đời sống. Qua đó tạo cơ hội để học sinh nâng cao dần năng lực tư duy, vận dụng giải quyết vấn đề và hình thành niềm yêu thích môn Toán; giúp các em nhìn nhận lại, hệ thống lại những học vấn toán học cốt lõi ở cấp trung học phổ thông, chuẩn bị tốt nhất cho các em ở kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông và tuyển sinh đại học. Những bài tập đó cũng cung cấp tư liệu để các thầy cô giáo dạy học phân hoá, bồi dưỡng học sinh khá, giỏi.

Các tác giả hi vọng sách có thể giúp học sinh học tốt môn Toán theo định hướng phát triển năng lực, đồng thời hỗ trợ tài liệu cho các thầy cô giáo, phụ huynh học sinh nhằm tham gia vào việc nâng cao khả năng tự học, tự thực hành giải quyết vấn đề ở lớp, ở nhà cho học sinh.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng trong khi biên soạn, song cuốn sách khó tránh khỏi sơ suất, rất mong nhận được sự góp ý của đông đảo bạn đọc để cuốn sách được hoàn thiện hơn trong các lần tái bản sau.

Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về: Công ty Cổ phần Đầu tư Xuất bản – Thiết bị Giáo dục Việt Nam, tầng 5, toà nhà hỗn hợp AZ Lâm Viên, 107 A đường Nguyễn Phong Sắc, phường Dịch Vọng Hậu, quận Cầu Giấy, TP. Hà Nội.

Xin chân thành cảm ơn.

Các tác giả

MỤC LỤC

Trang

Chương I
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

§1 TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

1. Tính đơn điệu của hàm số

a) Định lí

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên tập K. Nếu $f'(x) \geq 0$ (hoặc $f'(x) \leq 0$) với mọi x thuộc K và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số $f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên K.

b) Các bước để tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$.

Bước 2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i ($i = 1, 2, ..., n$) mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Bước 4. Căn cứ vào bảng biến thiên, nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

2. Điểm cực trị, giá trị cực trị của hàm số

a) Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập K và $x_0 \in K$, $x_1 \in K$.

- x_0 được gọi là một điểm cực đại của hàm số đã cho nếu tồn tại một khoảng $(a ; b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a ; b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (a ; b)$ và $x \neq x_0$.

  Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là *giá trị cực đại* của hàm số đã cho, kí hiệu là $f_{CĐ}$.

- x_1 được gọi là một điểm cực tiểu của hàm số đã cho nếu tồn tại một khoảng $(c ; d)$ chứa điểm x_1 sao cho $(c ; d) \subset K$ và $f(x) > f(x_1)$ với mọi $x \in (c ; d)$ và $x \neq x_1$.

  Khi đó, $f(x_1)$ được gọi là *giá trị cực tiểu* của hàm số đã cho, kí hiệu là f_{CT}.

- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là *giá trị cực trị* (hay *cực trị*).

***Chú ý*:** Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì điểm $M(x_0 ; f(x_0))$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

b) Dấu hiệu nhận biết

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a ; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a ; x_0)$ và $(x_0 ; b)$. Khi đó

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a ; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0 ; b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0.
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a ; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0 ; b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0.

c) Các bước để tìm điểm cực trị của hàm số $f(x)$

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số $f(x)$.

Bước 2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i ($i = 1, 2, ..., n$) mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Bước 4. Căn cứ vào bảng biến thiên, nêu kết luận về các điểm cực trị của hàm số.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Sử dụng bảng biến thiên, đồ thị hàm số để tìm khoảng đồng biến, nghịch biến, cực trị của hàm số

Ví dụ 1 Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	2	↘	$-\infty$

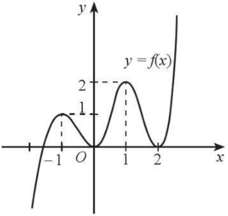
Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến, điểm cực trị của hàm số đó.

Giải

Căn cứ bảng biến thiên của hàm số, ta có:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(0 ; 1)$;
- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1 ; 0)$ và $(1 ; +\infty)$;
- Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và $x = 1$; đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Ví dụ 2 Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như *Hình 1*. Xác định khoảng đồng biến, nghịch biến và điểm cực trị của hàm số đó.



Hình 1

Giải

Dựa vào đồ thị hàm số, ta có:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty\,;\,-1)$, $(0\,;\,1)$ và $(2\,;\,+\infty)$.
- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1\,;\,0)$ và $(1\,;\,2)$.
- Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và $x = 1$; đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $x = 2$.

Vấn đề 2. Sử dụng dấu của đạo hàm để tìm khoảng đồng biến, nghịch biến, cực trị của hàm số

Ví dụ 3 Tìm các khoảng đơn điệu và điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = -x^3 + 2x^2 - 3$; b) $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x+1}$.

Giải

a) • Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- Ta có: $y' = -3x^2 + 4x$;

  $y' = 0$ khi $x = 0$ hoặc $x = \dfrac{4}{3}$.

- Bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		-3		$-\frac{49}{27}$		$-\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty\,;\,0)$ và $\left(\dfrac{4}{3}\,;+\infty\right)$; đồng biến trên khoảng $\left(0\,;\,\dfrac{4}{3}\right)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và đạt cực đại tại $x = \dfrac{4}{3}$.

b) • Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

• Ta có: $y' = \dfrac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$ với $x \neq -1$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1-\sqrt{3} \text{ hoặc } x = -1+\sqrt{3}.$$

• Bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		-1		$-1+\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$-4-2\sqrt{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-4+2\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty\,;-1-\sqrt{3})$ và $(-1+\sqrt{3}\,;+\infty)$; nghịch biến trên mỗi khoảng $(-1-\sqrt{3}\,;-1)$ và $(-1\,;-1+\sqrt{3})$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1-\sqrt{3}$ và đạt cực tiểu tại $x = -1+\sqrt{3}$.

Vấn đề 3. Sử dụng đồ thị của hàm số $f'(x)$ để tìm khoảng đồng biến, nghịch biến, điểm cực trị của hàm số $f(x)$

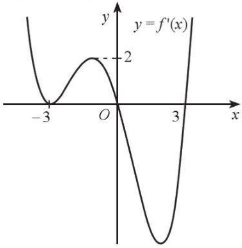
Phương pháp:

- Xác định hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ với trục hoành để tìm nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$.
- Xác định vị trí của đồ thị hàm số $f'(x)$ so với trục hoành để tìm dấu của $f'(x)$: nếu đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành thì $f'(x)$ nhận giá trị dương, nếu đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía dưới trục hoành thì $f'(x)$ nhận giá trị âm.
- Lập bảng xét dấu của $f'(x)$, rồi kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến, điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

Ví dụ 4 Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như *Hình 2*.

a) Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến, điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

b) Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$. Hàm số $g(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



Hình 2

Giải

a) Do hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Căn cứ vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta có:

$f'(x) = 0$ khi $x = -3$, $x = 0$, $x = 3$. Dựa vào vị trí của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ so với trục hoành, ta có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	0	−	0	+	

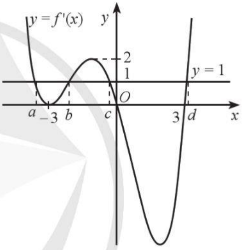
Vậy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; 0)$ và $(3 ; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(0 ; 3)$.

Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$.

b) Do hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $y = g(x)$ cũng xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x) = f'(x) - 1$; $g'(x) = 0$ khi $f'(x) = 1$. Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ với đường thẳng $y = 1$.

Căn cứ vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ở *Hình 3*, ta có phương trình $f'(x) = 1$ hay $g'(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt. Gọi 4 nghiệm đó theo thứ tự từ bé đến lớn là a, b, c, d.



Hình 3

Dựa vào vị trí của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ so với đường thẳng $y = 1$, ta có bảng xét dấu $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		a		b		c		d		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Vậy hàm số $g(x) = f(x) - x$ có 4 điểm cực trị.

Vấn đề 4. Ứng dụng

Ví dụ 5 Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0$ (s) cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t = 126$ (s), cho bởi hàm số sau: $v(t) = 0{,}001302t^3 - 0{,}09029t^2 + 23$ (v được tính bằng ft/s, 1ft = 0,3048 m) (*Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014*). Hỏi gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian nào tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi?

Giải

Gia tốc của tàu con thoi được tính bởi công thức:

$a(t) = v'(t) = 0{,}003906t^2 - 0{,}18058t.$

Khi đó, $a'(t) = 0{,}007812t - 0{,}18058$, $a'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{45\,145}{1\,953} \approx 23{,}12.$

Ta có bảng xét dấu của $a'(t)$ như sau:

t	0		$\dfrac{45145}{1953}$		126
$a'(t)$		$-$	0	$+$	

Vậy gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian từ 23,12 s đến 126 s.

C. BÀI TẬP

1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty\,;0)$. **B.** $(2\,;+\infty)$. **C.** $(-\infty\,;2)$. **D.** $(0\,;2)$.

2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2\,;0)$. **B.** $(4\,;+\infty)$. **C.** $(-\infty\,;0)$. **D.** $(-2\,;-1)$.

3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x(2x-5)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(-2) < f(-1)$. **B.** $f(0) > f(2)$. **C.** $f(3) > f(5)$. **D.** $f(3) > f(2)$.

4. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0 ; 2)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; 2)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0 ; 2)$.

5. Cho hàm số $y = \dfrac{x}{x-1}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty ; 1)$ và $(1 ; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty ; 1)$ và $(1 ; +\infty)$.

6. Trong các hàm số sau, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là:

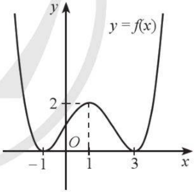
A. $y = x - \dfrac{1}{x}$. **B.** $y = 2x^3 - x^2 + 5x + 1$.

C. $y = x^4 + 2x^2 - 3$. **D.** $y = 2x^2 + 3$.

7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như *Hình 4*. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty ; 0)$. **B.** $(3 ; +\infty)$.

C. $(-1 ; 1)$. **D.** $(-\infty ; -1)$.



Hình 4

8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho là:

A. -1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-5	$\nearrow$	2

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -5$.
B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.
D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.

11. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x^2 - 1)^2(x - 2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

12. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3x + 2$. Kết luận nào sau đây là đúng?

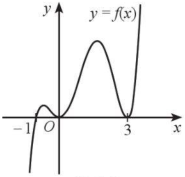
A. Hàm số có 3 cực trị.
B. Hàm số có 2 cực trị.
C. Hàm số có 1 cực trị.
D. Hàm số không có cực trị.

13. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 3$ đạt cực tiểu tại điểm:

A. -1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** -30.

14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như *Hình 5*. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

A. 2. **B.** 4.
C. 1. **D.** 3.

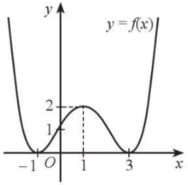


Hình 5

15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như *Hình 6*. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho là:

A. 2. **B.** 1.

C. – 1. **D.** 0.

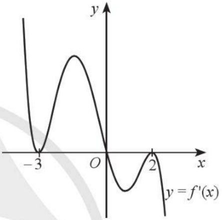


Hình 6

16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như *Hình 7*. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là:

A. 4. **B.** 3.

C. 2. **D.** 1.



Hình 7

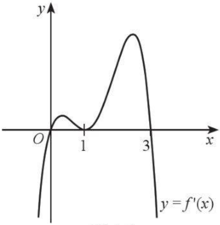
*Trong mỗi ý a), b), c), d) ở câu **17**, **18**, chọn phương án đúng (**Đ**) hoặc sai (**S**).*

17. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

a) $y' = 3x^2 - 3$.	**Đ**	**S**
b) $y' = 0$ khi $x = -1, x = 1$.	**Đ**	**S**
c) $y' > 0$ khi $x \in (-1 ; 1)$ và $y' < 0$ khi $x \in (-\infty ; -1) \cup (1 ; +\infty)$.	**Đ**	**S**
d) Giá trị cực đại của hàm số là $f_{CĐ} = 0$.	**Đ**	**S**

18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như *Hình 8*.

a) $f'(x) = 0$ khi $x = 0, x = 1, x = 3$.	**Đ**	**S**
b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$.	**Đ**	**S**
c) $f'(x) > 0$ khi $x \in (0 ; 3)$.	**Đ**	**S**
d) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0 ; 3)$.	**Đ**	**S**



Hình 8

19. Tìm các khoảng đơn điệu của mỗi hàm số sau:

a) $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x-1$;

b) $y=x^3-3x^2+3x-1$;

c) $y=x^4+x^2-2$;

d) $y=-x^4+2x^2-1$;

e) $y=\frac{2x-3}{x-4}$;

g) $y=\frac{x^2+x+2}{x+2}$.

20. Tìm điểm cực trị của mỗi hàm số sau:

a) $y=x^3-12x+8$;

b) $y=2x^4-4x^2-1$;

c) $y=\frac{x^2-2x-2}{x+1}$;

d) $y=-x+1-\frac{9}{x-2}$.

21. Dùng đạo hàm của hàm số, hãy giải thích:

a) Hàm số $y=a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a>1$, nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $0<a<1$.

b) Hàm số $y=\log_a x$ đồng biến trên khoảng $(0\,;+\infty)$ khi $a>1$, nghịch biến trên khoảng $(0\,;+\infty)$ khi $0<a<1$.

22. Chứng minh rằng:

a) Hàm số $y=\sqrt{x^2-4}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty\,;-2)$ và đồng biến trên khoảng $(2\,;+\infty)$.

b) Hàm số $y=\ln(x^2+1)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty\,;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0\,;+\infty)$.

c) Hàm số $y=2^{-x^2+2x}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty\,;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1\,;+\infty)$.

23. Tìm điểm cực trị của mỗi hàm số sau:

a) $y=x\,.\,e^x$;

b) $y=(x+1)^2\,.\,e^{-x}$;

c) $y=x^2\,.\,\ln x$;

d) $y=\frac{x}{\ln x}$.

24. Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1 000 con vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức:

$$N(t)=1\,000+\frac{100t}{100+t^2},$$

trong đó t là thời gian tính bằng giây ($t\geq 0$) (*Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014*). Trong khoảng thời gian nào từ lúc nuôi cấy, số lượng vi khuẩn sẽ tăng lên?

25. Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 14t + 1,$$

trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Trong khoảng thời gian nào của 5 giây đầu tiên thì vận tốc tức thời của chất điểm tăng lên?

§2 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D.

• $M = \max\limits_{D} f(x)$ nếu $\begin{cases} \forall x \in D \text{ thì } f(x) \le M \\ \exists x_0 \in D \text{ sao cho } f(x_0) = M. \end{cases}$

• $m = \min\limits_{D} f(x)$ nếu $\begin{cases} \forall x \in D \text{ thì } f(x) \ge m \\ \exists x_1 \in D \text{ sao cho } f(x_1) = m. \end{cases}$

2. Cách tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một khoảng, đoạn hay nửa khoảng bằng đạo hàm

• Lập bảng biến thiên của hàm số trên tập hợp đó.

• Căn cứ vào bảng biến thiên, kết luận giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số.

***Chú ý*:** Với hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a ; b)$, có thể trừ một số hữu hạn điểm, ta có thể tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[a ; b]$ như sau:

Bước 1. Tìm các điểm $x_1, x_2, ..., x_n$ thuộc khoảng $(a ; b)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 2. Tính $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(a)$ và $f(b)$.

Bước 3. So sánh các giá trị tìm được ở *Bước 2.*

Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a ; b]$, số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a ; b]$.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một khoảng, đoạn hay nửa khoảng

Ví dụ 1 Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 12x + 1$ trên khoảng $(1\ ;+\infty)$.

Giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 12x + 1$ với $x \in (1\ ;+\infty)$.

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 12$. Khi đó, trên khoảng $(1\ ;+\infty)$, $f'(x) = 0$ khi $x = 2$. Ngoài ra $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-10	$\searrow$	-15	$\nearrow$	$+\infty$

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta có: $\min\limits_{(1\ ;+\infty)} f(x) = -15$ tại $x = 2$.

Ví dụ 2 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 7)$ trên đoạn $[0\ ;3]$.

Giải

- Ta có: $f'(x) = e^x(x^2 - 3x + 2)$. Khi đó, trên khoảng $(0\ ;3)$, $f'(x) = 0$ khi $x = 1$ hoặc $x = 2$.
- $f(0) = 7$, $f(1) = 3e$, $f(2) = e^2$, $f(3) = e^3$.

Vậy $\max\limits_{[0\ ;3]} f(x) = e^3$ tại $x = 3$, $\min\limits_{[0;3]} f(x) = 7$ tại $x = 0$.

Vấn đề 2. Ứng dụng

Ví dụ 3 Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức: $V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4$ với $0 \le t \le 0{,}5$.

(*Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson*)

a) Ban đầu trong bình xăng có bao nhiêu lít xăng?

b) Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy. Hỏi dung tích của bình xăng trong xe là bao nhiêu lít?

c) Khi xăng chảy vào bình xăng, gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \le t \le 0,5$. Xăng chảy vào bình xăng ở thời điểm nào có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất?

Giải

a) Khi $t = 0$, ta có: $V(0) = 4$. Vậy ban đầu trong bình xăng có 4 lít xăng.

b) 30 giây = 0,5 phút. Khi $t = 0,5$, ta có: $V(0,5) = 41,5$. Vậy dung tích của bình xăng trong xe là 41,5 lít.

c) Ta có: $V'(t) = 300(2t - 3t^2)$ với $0 \le t \le 0,5$.

$V''(t) = 300(2 - 6t)$, có $V''(t) = 0$ khi $t = \frac{1}{3}$.

Lại có $V'\left(\frac{1}{3}\right) = 100$, $V'(0) = 0$, $V'(0,5) = 75$. Vậy $\max\limits_{[0\,;\,0,5]} V'(t) = 100$ tại $t = \frac{1}{3}$ hay khi xăng chảy vào bình xăng thì ở thời điểm $t = \frac{1}{3}$ phút có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất.

C. BÀI TẬP

26. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 4}$ bằng:

A. 2. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 1.

27. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-2}$ trên nửa khoảng $[-3\,;2)$ bằng:

A. $-\frac{7}{5}$. **B.** 7. **C.** $\frac{7}{5}$. **D.** -7.

28. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-2\,;0]$ bằng:

A. 40. **B.** 8. **C.** 33. **D.** 35.

29. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{5 - 4x}$ trên đoạn $[-1\,;1]$ bằng:

A. 9. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

30. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{2x+1}{1-x}$ trên đoạn $[2\,;3]$ bằng:

A. 0. **B.** -2. **C.** 1. **D.** -5.

31. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x+1}$ trên đoạn $[0\,;3]$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

32. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + 1 + \dfrac{1}{x+1}$ trên đoạn [1 ; 2] bằng:

A. 2. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{10}{3}$. **D.** – 2.

33. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{2}\cos x$ trên đoạn $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$ bằng:

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{\pi}{4} + 1$. **D.** $\dfrac{\pi}{2}$.

34. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = e^{x^3 - 3x + 3}$ trên đoạn [0 ; 2] bằng:

A. e^2. **B.** e^3. **C.** e^5. **D.** e.

35. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x^2 - 2) \,.\, e^{2x}$ trên đoạn [– 1 ; 2] bằng:

A. $-e^2$. **B.** $-2e^2$. **C.** $2e^4$. **D.** $2e^2$.

36. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \ln(x^2 + x + 2)$ trên đoạn [1 ; 3] bằng:

A. ln14. **B.** ln12. **C.** ln4. **D.** ln10.

37. Giá trị nhỏ nhất m, giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x\sqrt{4 - x^2}$ lần lượt bằng:

A. $m = 0, M = 2$. **B.** $m = -2, M = 2$.
C. $m = -2, M = 0$. **D.** $m = 0, M = 4$.

38. Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$ trên đoạn $[1 ; e^3]$ là $M = \dfrac{a}{e^b}$, trong đó a, b là các số tự nhiên. Khi đó $a^2 + 2b^3$ bằng:

A. 22. **B.** 24. **C.** 32. **D.** 135.

*Trong mỗi ý a), b), c), d) ở câu **39**, **40**, chọn phương án đúng (**Đ**) hoặc sai (**S**).*

39. Cho hàm số $y = x^2 \,.\, \ln x$.

a) $y' = 2x \,.\, \ln x$.

b) $y' = 0$ khi $x = 1$.

c) $y\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\dfrac{1}{2e}$.

Đ	**S**
Đ	**S**
Đ	**S**

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[\frac{1}{e}; e\right]$ bằng $-\frac{1}{2e}$.	Đ	S

40. Bác Lâm muốn gò một cái thùng bằng tôn dạng hình hộp chữ nhật không nắp có đáy là hình vuông và đựng đầy được 32 lít nước. Gọi độ dài cạnh đáy của thùng là x (dm), chiều cao của thùng là h (dm).

a) Thể tích của thùng là $V = x^2 \,.\, h$ (dm^3).	Đ	S
b) Tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của thùng là: $S = 4xh + x^2$ (dm^2).	Đ	S
c) Đạo hàm của hàm số $S(x) = \frac{128}{x} + x^2$ là $S'(x) = \frac{128}{x^2} + 2x$.	Đ	S
d) Để làm được cái thùng mà tốn ít nguyên liệu nhất thì độ dài cạnh đáy của thùng là 4 dm.	Đ	S

41. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{-x^3}{3} - x^2 + 3x + 1$ trên khoảng $(0 ; 3)$;

b) $y = x^4 - 8x^2 + 10$ trên khoảng $(-\sqrt{7} ; \sqrt{7})$;

c) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;

d) $y = x + \frac{4}{x - 1}$ trên khoảng $(-\infty ; 1)$.

42. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số sau:

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ trên đoạn $[-1 ; 5]$;

b) $y = \left(x - \sqrt{2}\right)^2 . \left(x + \sqrt{2}\right)^2$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2} ; 2\right]$;

c) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ trên đoạn $[-1 ; 2]$;

d) $y = x + \frac{4}{x}$ trên đoạn $[3 ; 4]$;

e) $y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x}$;

g) $y = x\sqrt{16 - x^2}$.

43. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số sau:

a) $y = \sin 2x - x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right]$; b) $y = x + \cos^2 x$ trên đoạn $\left[0 ; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

44. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số sau:

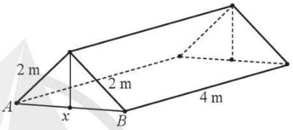
a) $y = 3^x + 3^{-x}$ trên đoạn $[-1 ; 2]$;

b) $y = x.e^{-2x^2}$ trên đoạn $[0 ; 1]$;

c) $y = \ln(x^2 + 2x + 3)$ trên đoạn $[-2 ; 3]$;

d) $y = -3x + 5 + x\ln x$ trên đoạn $[1 ; 3]$.

45. Nhóm bạn Đức dựng trên một khu đất bằng phẳng một chiếc lều từ một tấm bạt hình vuông có độ dài cạnh 4 m như *Hình 9* với hai mép tấm bạt sát mặt đất. Tính khoảng cách AB để khoảng không gian trong lều là lớn nhất.



Hình 9

46. Nồng độ C của một loại hoá chất trong máu sau t giờ tiêm vào cơ thể được cho bởi công thức: $C(t) = \dfrac{3t}{27 + t^3}$ với $t \geq 0$ (*Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014*).

Sau khoảng bao nhiêu giờ tiêm thì nồng độ của hoá chất trong máu là cao nhất?

47. Khối lượng riêng S (kg/dm^3) của nước phụ thuộc vào nhiệt độ T ($^{\circ}$C) được cho bởi công thức:

$$S = \frac{5,755}{10^8}T^3 - \frac{8,521}{10^6}T^2 + \frac{6,540}{10^5}T + 0,99987 \text{ với } 0 < T \leq 25$$

(*Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014*).

a) Tính khối lượng riêng của nước ở nhiệt độ 25 $^{\circ}$C.

b) Ở nhiệt độ nào thì khối lượng riêng của nước là lớn nhất?

§3 ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đường tiệm cận ngang

Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là *đường tiệm cận ngang* (hay *tiệm cận ngang*) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y_0$.

2. Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là *đường tiệm cận đứng* (hay *tiệm cận đứng*) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty;\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty;\ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty;\ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty.$$

3. Đường tiệm cận xiên

Đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ được gọi là *đường tiệm cận xiên* (hay *tiệm cận xiên*) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0.$$

Để xác định hệ số a, b của đường tiệm cận xiên $y = ax + b$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có thể áp dụng công thức sau:

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ và } b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - ax] \text{ hoặc}$$

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ và } b = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - ax].$$

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Tìm đường tiệm cận của đồ thị hàm số

Ví dụ 1 Tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang, tiệm cận xiên (nếu có) của đồ thị mỗi hàm số sau:

a) $y = f(x) = \dfrac{x}{2-x}$; b) $y = f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 2}{x-1}$; c) $y = f(x) = x - 3 + \dfrac{1}{x^2}$.

Giải

a) Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Ta có:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2-x} = -1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{2-x} = -1$.

  Vậy đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x}{2-x} = \lim\limits_{x\to 2^-} \left(-1 + \dfrac{2}{2-x}\right) = +\infty$,

  $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x}{2-x} = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(-1 + \dfrac{2}{2-x}\right) = -\infty$.

  Vậy đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

b) Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Ta có:

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}=+\infty$.

  Vậy đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

- $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x+2}{x(x-1)}=2$ và

  $b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+2}{x-1}=-1$.

  Vậy đường thẳng $y = 2x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho (khi $x\to+\infty$).

  Tương tự, do $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-2x]=-1$ nên đường thẳng $y = 2x - 1$ cũng là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho (khi $x\to-\infty$).

c) Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ta có:

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x-3+\dfrac{1}{x^2}\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x-3+\dfrac{1}{x^2}\right)=+\infty$.

  Vậy đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-3)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x-3)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

  Vậy đường thẳng $y = x - 3$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

Vấn đề 2. Ứng dụng

Ví dụ 2 Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x (tháng) được tính theo công thức $S(x)=200\left(5-\dfrac{9}{2+x}\right)$, trong đó $x \geq 1$ (*Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014*).

a) Xem $y = S(x)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1\,;+\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

b) Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong x (tháng) khi x đủ lớn.

Giải

a) Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 200\left(5-\dfrac{9}{2+x}\right)=200\,.\,5=1\,000$.

Vậy đường thẳng $y = 1\,000$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = S(x)$.

b) Ta có đồ thị hàm số $S(x)$ nhận đường thẳng $y = 1\ 000$ làm tiệm cận ngang, tức là khi x đủ lớn thì số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong x (tháng) sẽ tiến gần đến mức 1 000 và số lượng sản phẩm bán không thể vượt mức 1 000 cho dù thời gian x có kéo dài đến vô cùng.

C. BÀI TẬP

48. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+1}{x-2}$ là đường thẳng:

A. $x = 2$. **B.** $x = -\dfrac{1}{3}$. **C.** $y = 3$. **D.** $y = \dfrac{1}{3}$.

49. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{5x-2}{x+3}$ là đường thẳng:

A. $x = -3$. **B.** $x = 5$. **C.** $y = -3$. **D.** $y = 5$.

50. Tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-7}{6-3x}$ là:

A. Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$; tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \dfrac{1}{3}$.

B. Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = \dfrac{7}{2}$; tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -\dfrac{2}{3}$.

C. Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$; tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \dfrac{2}{3}$.

D. Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$; tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -\dfrac{2}{3}$.

51. Đồ thị hàm số nào sau đây nhận đường thẳng $x = -1$ làm tiệm cận đứng?

A. $y = \dfrac{3x-1}{x+1}$. **B.** $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. **C.** $y = \dfrac{-x+1}{x-2}$. **D.** $y = \dfrac{x+1}{x-2}$.

52. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = 2x - 1 - \dfrac{2}{x+1}$ là đường thẳng:

A. $y = 2x$. **B.** $y = x + 1$. **C.** $y = 2x - 1$. **D.** $y = -2x + 1$.

53. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 2$

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng:

A. $x = 1$. **B.** $x = 2$. **C.** $y = 1$. **D.** $y = 2$.

54. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $y = 2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $x = -2$.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $y = -2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $x = 2$.

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -2$.

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

55. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

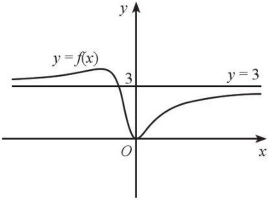
A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$ và không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$.

C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -2$.

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$.

56. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị có đường tiệm cận ngang như *Hình 10*. Hàm số $y = f(x)$ có thể là hàm số nào trong các hàm số sau?



Hình 10

A. $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + x + 1}$. **B.** $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + x + 1}$.

C. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x + 1}$. **D.** $f(x) = \dfrac{x^2}{3x^2 + x + 1}$.

57. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có đồ thị như *Hình 11*.

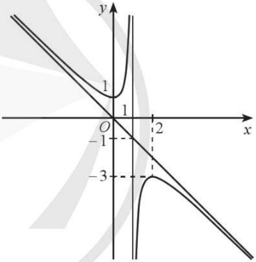
Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số là:

A. Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và tiệm cận xiên là đường thẳng $y = -x$.

B. Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$ và tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.

C. Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.

D. Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và tiệm cận xiên là đường thẳng $y = -2x$.



Hình 11

58. Giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{-5x + 3}{x}$ là:

A. $I(1 ; -5)$. **B.** $I(0 ; -5)$. **C.** $I(0 ; 5)$. **D.** $I(1 ; 5)$.

59. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

60. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

61. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = -x + 3 - \frac{5}{2x+1}$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

62. *Trong mỗi ý a), b), c), d) chọn phương án đúng (**Đ**) hoặc sai (**S**).*

Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3}{-x-1}$.

a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.	**Đ**	**S**
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -1$.	**Đ**	**S**
c) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = -x$.	**Đ**	**S**
d) Giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là $I(-1 ; 1)$.	**Đ**	**S**

63. Tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{x-1}{2x+3}$; b) $y = -3 + \frac{5}{x-4}$;

c) $y = \frac{3x-7}{x^2}$; d) $y = \frac{-2x^2+1}{x^2-2x+1}$.

64. Tìm tiệm cận đứng, tiệm cận xiên của đồ thị mỗi hàm số sau:

a) $y = 5x - 2 + \frac{1}{x+3}$; b) $y = -7x + \frac{x-1}{x^2}$;

c) $y = \frac{x^2+2x}{-x+2}$; d) $y = \frac{2x^2+9x}{x+1}$.

65. Tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang, tiệm cận xiên (nếu có) của đồ thị mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{3x+5}{x^2-4}$; b) $y = \frac{-x^2-1}{4x^2+9}$; c) $y = \frac{3x^2+x}{1-x}$.

66. Tốc độ đánh máy trung bình S (tính bằng từ trên phút) của một học viên sau t tuần học được cho bởi công thức: $S(t) = \frac{100t^2}{65+t^2}$ với $t > 0$.

a) Xem $y = S(t) = \frac{100t^2}{65+t^2}$ là một hàm số xác định trên khoảng $(0 ; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

b) Nêu nhận xét về tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó khi thời gian t càng lớn.

67. Tổng chi phí để sản xuất x sản phẩm của một xí nghiệp được tính theo công thức

$$T = 20x + 100\ 000 \text{ (nghìn đồng)}.$$

a) Viết công thức tính chi phí trung bình $C(x)$ của 1 sản phẩm khi sản xuất được x sản phẩm.

b) Xem $y = C(x)$ là một hàm số xác định trên khoảng $(0 ; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

c) Xét tính đơn điệu của hàm số $y = C(x)$ trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

d) Nêu nhận xét về chi phí để tạo ra 1 sản phẩm khi x càng lớn.

§4 KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Sơ đồ khảo sát hàm số

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

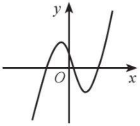
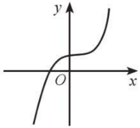
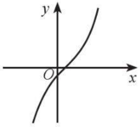
Bước 2. Xét sự biến thiên của hàm số

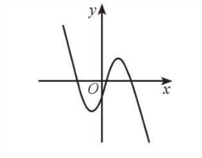
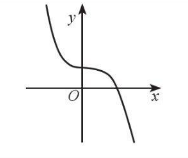
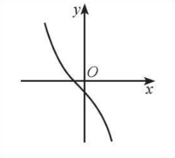
- Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị (nếu có).
- Lập bảng biến thiên của hàm số, bao gồm: tính đạo hàm của hàm số, xét dấu đạo hàm, xét chiều biến thiên và tìm cực trị của hàm số (nếu có), điền các kết quả vào bảng.

Bước 3. Vẽ đồ thị hàm số

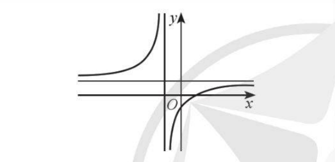
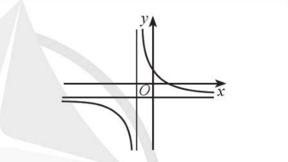
- Vẽ các đường tiệm cận (nếu có).
- Xác định các điểm đặc biệt của đồ thị: cực trị, giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ (trong trường hợp đơn giản), ...
- Nhận xét về đặc điểm của đồ thị: chỉ ra tâm đối xứng, trục đối xứng (nếu có).

2. Dạng của đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$

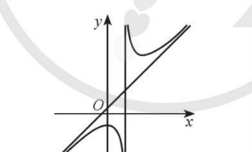
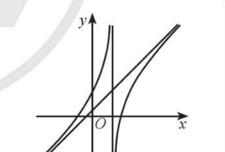
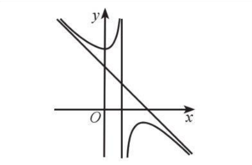
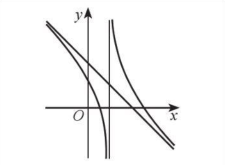
	Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt	**Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép**	**Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm**
$a > 0$			

$a < 0$			

3. Dạng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0,\ ad - bc \neq 0)$

$ad - bc > 0$	$ad - bc < 0$
	

4. Dạng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a \neq 0,\ m \neq 0)$

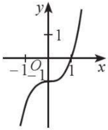
	Hàm số có cực trị	Hàm số không có cực trị
a, m cùng dấu		
a, m trái dấu		

B. VÍ DỤ

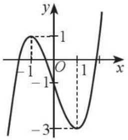
Vấn đề 1. Nhận dạng đồ thị hàm số

Ví dụ 1 Hàm số $f(x) = x^3 - 3x - 1$ có đồ thị là hình nào trong những hình sau đây?

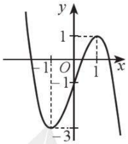
A.



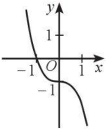
B.



C.



D.



Giải

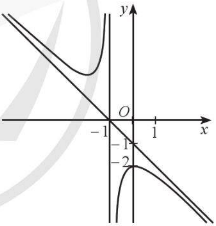
Do hệ số $a = 1 > 0$ nên đồ thị hàm số có thể là phương án A hoặc B.

Mặt khác $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x = -1$, $x = 1$ nên đồ thị hàm số có hai điểm cực trị. Vậy phương án đúng là B. Chọn **B**.

Ví dụ 2 Đường cong ở *Hình 12* là đồ thị của hàm số:

A. $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{-x - 1}$. **B.** $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

C. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$. **D.** $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x + 1}$.



Hình 12

Giải

Dựa vào đồ thị hàm số ở *Hình 12*, ta có:

- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$ nên ta loại phương án C.
- Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng đi xuống nên a, m trái dấu. Vậy phương án đúng là A. Chọn **A**.

Vấn đề 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

Ví dụ 3 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = -x^3 + 3x^2 - 1$; b) $y = \dfrac{-x^2 + 2x - 4}{x - 2}$.

Giải

a) 1) Tập xác định: $\mathbb{R}$.

2) Sự biến thiên

• Giới hạn tại vô cực: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$.

• Bảng biến thiên:

$y' = -3x^2 + 6x$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; 0)$ và $(2 ; +\infty)$, đồng biến trên khoảng $(0 ; 2)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = -1$; hàm số đạt cực đại tại $x = 2$, $y_{CĐ} = 3$.

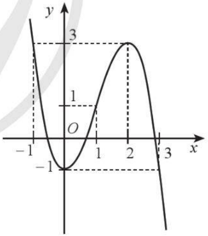
3) Đồ thị

• Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0 ; -1)$.

• Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-1 ; 3)$, $(0 ; -1)$, $(1 ; 1)$, $(2 ; 3)$ và $(3 ; -1)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ được cho ở *Hình 13*.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số đó là điểm $I(1 ; 1)$.



Hình 13

b) 1) Tập xác định: $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

2) Sự biến thiên

• Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

Ta viết hàm số đã cho dưới dạng: $y = -x - \dfrac{4}{x-2}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to 2^-} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} y = -\infty$. Do đó, đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x \to +\infty} [y - (-x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4}{x-2} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} [y - (-x)] = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-4}{x-2} = 0$. Do đó, đường thẳng $y = -x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

• Bảng biến thiên:

$y' = \dfrac{-x^2 + 4x}{(x-2)^2}$;

$y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 4$.

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-6	↘	$-\infty$

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; 0)$ và $(4 ; +\infty)$; đồng biến trên mỗi khoảng $(0 ; 2)$ và $(2 ; 4)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = 2$; đạt cực đại tại $x = 4$, $y_{CĐ} = -6$.

3) Đồ thị

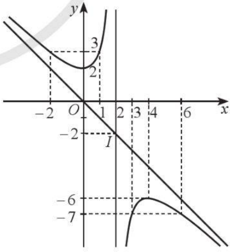
• Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0 ; 2)$.

• Đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

• Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-2 ; 3)$, $(0 ; 2)$, $(1 ; 3)$, $(3 ; -7)$, $(4 ; -6)$, $(6 ; -7)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 2x - 4}{x - 2}$ được cho ở *Hình 14*.

• Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2 ; -2)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.



Hình 14

Vấn đề 3. Ứng dụng

Ví dụ 4 Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng.

Trong khoảng 70 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm

$$h(t) = -0{,}01t^3 + 1{,}1t^2 - 30t + 250,$$

trong đó t là thời gian tính bằng giây và h là độ cao tính bằng kilômét (*Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016*).

a) Tìm thời điểm t $(0 \le t \le 70)$ sao cho con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng. Khoảng cách nhỏ nhất này là bao nhiêu?

b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = h(t)$ với $0 \le t \le 70$ (đơn vị trên trục hoành là 10 giây, đơn vị trên trục tung là 50 km).

c) Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $0 \le t \le 70$. Xác định hàm số $v(t)$.

d) Vận tốc tức thời của con tàu lúc bắt đầu đốt cháy các tên lửa hãm là bao nhiêu? Tại thời điểm $t = 25$ (giây) là bao nhiêu?

e) Tại thời điểm $t = 25$ (giây), vận tốc tức thời của con tàu vẫn giảm hay đang tăng trở lại?

Giải

a) Tại thời điểm $t \approx 18{,}11$ giây thì con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng và khoảng cách nhỏ nhất này xấp xỉ bằng 8,074 km.

b) 1) Tập xác định: $D = [0\,;\,70]$.

2) Sự biến thiên

• Bảng biến thiên:

$y' = -0{,}03t^2 + 2{,}2t - 30.$

$y' = 0 \Leftrightarrow t = t_1 = \dfrac{110 - \sqrt{3\,100}}{3} \approx 18{,}11$ hoặc $t = t_2 = \dfrac{110 + \sqrt{3\,100}}{3} \approx 55{,}23.$

t	0		t_1		t_2		70
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	250	↘	$h(t_1)$	↗	$h(t_2)$	↘	110

Với $h(t_1) \approx 8{,}074$, $h(t_2) \approx 263{,}778$.

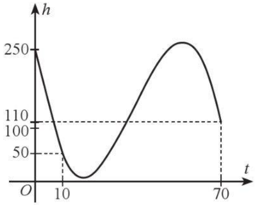
Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(0 ; t_1)$ và $(t_2 ; 70)$, đồng biến trên khoảng $(t_1 ; t_2)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $t = t_1$, $y_{CT} \approx 8,074$; hàm số đạt cực đại tại $t = t_2$, $y_{CĐ} \approx 263,778$.

3) Đồ thị

- Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0 ; 250)$.
- Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(10 ; 50)$, $(70 ; 110)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = h(t)$ được cho ở *Hình 15*.



Hình 15

c) Vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t (giây) được tính bởi:

$$v(t) = h'(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30.$$

d) Lúc bắt đầu đốt cháy các tên lửa hãm là tại thời điểm $t = 0$ (giây).

Vận tốc tức thời của con tàu lúc bắt đầu đốt cháy các tên lửa hãm là:

$$v(0) = h'(0) = -30 \text{ (km/giây)}.$$

Vận tốc tức thời của con tàu tại thời điểm $t = 25$ (giây) là:

$$v(25) = h'(25) = 6,25 \text{ (km/giây)}.$$

e) Ta có: $v'(t) = -0,06t + 2,2$.

$v'(t) = 0$ khi $t = \frac{110}{3}$. Bảng xét dấu của $v'(t)$ như sau:

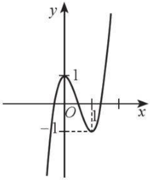
t	0		$\frac{110}{3}$		70
$v'(t)$		$+$	0	$-$	

Căn cứ vào bảng xét dấu $v'(t)$, ta có hàm số $v(t)$ đồng biến trên khoảng $\left(0 ; \frac{110}{3}\right)$ nên tại thời điểm $t = 25$ (giây) thì vận tốc tức thời của con tàu đang tăng.

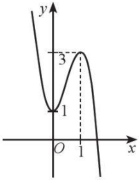
C. BÀI TẬP

68. Đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ là đường cong nào trong các đường cong sau?

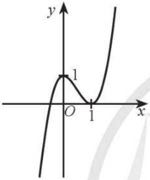
A.



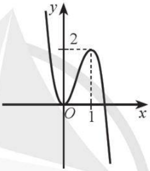
B.



C.

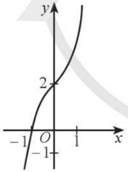


D.

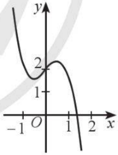


69. Đồ thị hàm số $y = -x^3 - x + 2$ là đường cong nào trong các đường cong sau?

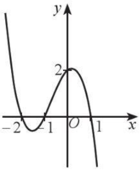
A.



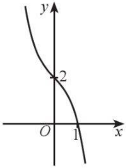
B.



C.

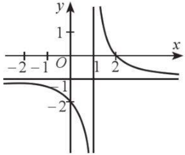


D.

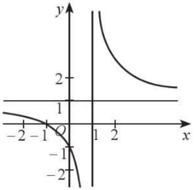


70. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x}{x+1}$ là đường cong nào trong các đường cong sau?

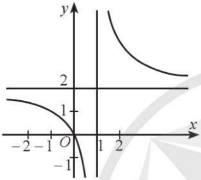
A.



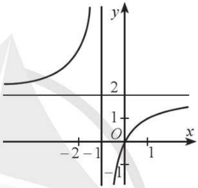
B.



C.

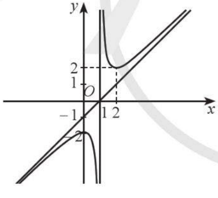


D.

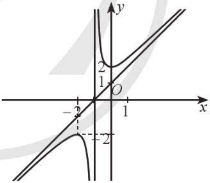


71. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ là đường cong nào trong các đường cong sau?

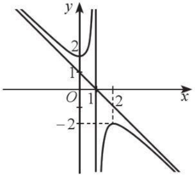
A.



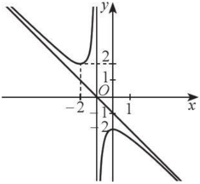
B.



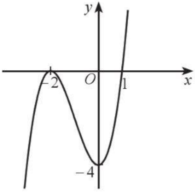
C.



D.



72. Đường cong ở *Hình 16* là đồ thị của hàm số:



Hình 16

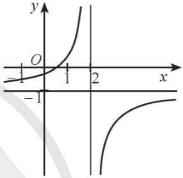
A. $y=-\frac{x^3}{3}+x^2-4$.

B. $y=x^3-3x^2-4$.

C. $y=x^3+3x^2-4$.

D. $y=-x^3-3x^2+4$.

73. Đường cong ở *Hình 17* là đồ thị của hàm số:

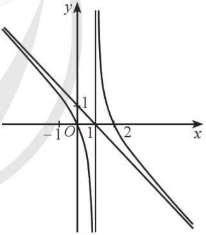


Hình 17

A. $y=\frac{1-2x}{2x-4}$. **B.** $y=\frac{1-x}{x-2}$.

C. $y=\frac{1-x}{2-x}$. **D.** $y=\frac{1-2x}{x-1}$.

74. Đường cong ở *Hình 18* là đồ thị của hàm số:

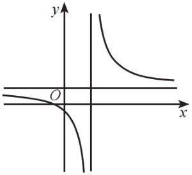


Hình 18

A. $y=\frac{x^2-2x}{x-1}$. **B.** $y=\frac{x^2+2x}{-x+1}$.

C. $y=\frac{-x^2+2x}{2x-2}$. **D.** $y=\frac{-x^2+2x}{x-1}$.

75. Cho hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ với $a>0$ có đồ thị là đường cong ở *Hình 19*. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



Hình 19

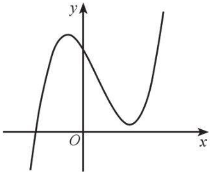
A. $b>0$, $c<0$, $d<0$. **B.** $b>0$, $c>0$, $d<0$.

C. $b<0$, $c>0$, $d<0$. **D.** $b<0$, $c<0$, $d<0$.

*Trong mỗi ý a), b), c), d) ở câu **76**, **77**, chọn phương án đúng (**Đ**) hoặc sai (**S**).*

76. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ có đồ thị là đường cong ở *Hình 20*.

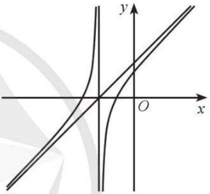
a) $a > 0$.	**Đ**	**S**
b) Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.	**Đ**	**S**
c) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm cùng phía với trục tung.	**Đ**	**S**
d) $b < 0$.	**Đ**	**S**



Hình 20

77. Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x + n}$ có đồ thị là đường cong ở *Hình 21*.

a) $n < 0$.	**Đ**	**S**
b) $a > 0$.	**Đ**	**S**
c) $c > 0$.	**Đ**	**S**
d) $b < 0$.	**Đ**	**S**



Hình 21

78. Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như *Hình 22*. Căn cứ vào đồ thị hàm số:

a) Tìm khoảng đơn điệu, điểm cực đại, cực tiểu của hàm số.

b) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1 ; 2]$.

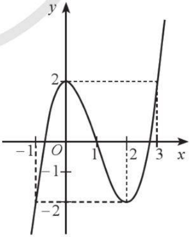
c) Tìm điểm trên đồ thị hàm số có hoành độ bằng 2.

d) Tìm điểm trên đồ thị hàm số có tung độ bằng 2.

e) Đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại mấy điểm?

g) Với giá trị nào của x thì $-2 < f(x) < 2$?

h) Tìm công thức xác định hàm số $f(x)$.



Hình 22

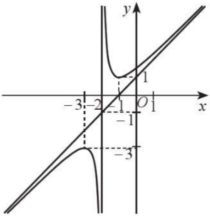
79. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ (với a, $m \neq 0$) có đồ thị là đường cong như *Hình 23*. Căn cứ vào đồ thị hàm số:

a) Tìm khoảng đơn điệu, điểm cực đại, cực tiểu của hàm số.

b) Viết phương trình đường tiệm cận đứng, tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

c) Phương trình $f(x) = 3$ có bao nhiêu nghiệm?

d) Tìm công thức xác định hàm số $y = f(x)$, biết $m = 1$.



Hình 23

80. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau:

a) $y = (x - 2)(x + 1)^2$;

b) $y = -\dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 2$;

c) $y = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$;

d) $y = -\dfrac{1}{4}(x^3 - 6x^2 + 12x)$.

81. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau:

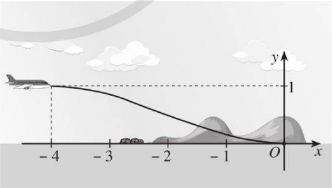
a) $y = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$;

b) $y = \dfrac{x}{x - 2}$;

c) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{-x + 1}$;

d) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 2}$.

82*. Một máy bay loại nhỏ bắt đầu hạ cánh, đường bay của nó khi gắn với hệ trục toạ độ *Oxy* được mô phỏng ở *Hình 24*. Biết đường bay của nó có dạng đồ thị hàm số bậc ba; vị trí bắt đầu hạ cánh có toạ độ $(-4\ ;\ 1)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số và máy bay tiếp đất tại vị trí gốc toạ độ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.



Hình 24

a) Tìm công thức xác định hàm số mô phỏng đường bay của máy bay trên đoạn $[-4\ ;\ 0]$.

b) Khi máy bay cách vị trí hạ cánh theo phương ngang 3 dặm thì máy bay cách mặt đất bao nhiêu dặm? (Biết đơn vị trên hệ trục toạ độ là dặm).

c) Khi ở độ cao 0,5 dặm, máy bay cách vị trí hạ cánh theo phương ngang bao nhiêu dặm?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

83. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(-6) > f(-5)$. **B.** $f(1) > f(2)$.

C. $f(5) < f(7)$. **D.** $f(-3) > f(-1)$.

84. Kết luận nào sau đây là đúng đối với hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

85. Trong các hàm số sau, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là:

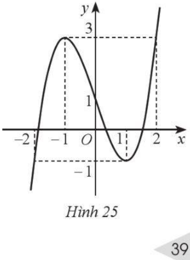
A. $y = e^{-x+2}$. **B.** $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 1)$.

C. $y = -x^3 + 2x^2 + 1$. **D.** $y = -x + 1 + \frac{1}{x}$.

86. Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như *Hình 25*. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty ; 3)$. **B.** $(1 ; +\infty)$.

C. $(-1 ; +\infty)$. **D.** $(-1 ; 1)$.



Hình 25

87. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

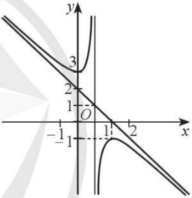
88. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)^2(x-1)(x+2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Điểm cực đại của hàm số đã cho là:

A. -1. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 1.

89. Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ (với a, $m \neq 0$) có đồ thị là đường cong như *Hình 26*. Giá trị cực đại của hàm số là:

A. 0. **B.** -1

C. 2. **D.** 3.



Hình 26

90. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{2x+1}{1-x}$ trên đoạn $[2\ ;\ 3]$ bằng:

A. -5. **B.** -2. **C.** 0. **D.** 1.

91. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{1-x^2}$ bằng:

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 1. **D.** 2.

92. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x - 2\sin x$ trên đoạn $[0\ ;\ \pi]$ lần lượt là:

A. $M = \pi$, $m = \dfrac{\pi}{3} - \sqrt{3}$. **B.** $M = \pi$, $m = 0$.

C. $M = \pi$, $m = \dfrac{\pi}{6} - 1$. **D.** $M = \pi$, $m = \dfrac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$.

93. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x \,.\, \ln x$ trên đoạn $[1 \,;\, e^2]$ bằng:

A. $M = 0,\ m = -\dfrac{1}{e}$. **B.** $M = \dfrac{1}{e},\ m = 0$.

C. $M = 2e^2,\ m = 0$. **D.** $M = 2e^2,\ m = -\dfrac{1}{e}$.

94. Đồ thị hàm số nào sau đây nhận đường thẳng $y = -2$ làm tiệm cận ngang?

A. $y = \dfrac{2x-1}{-1+x}$. **B.** $y = \dfrac{-x+1}{2x-1}$.

C. $y = \dfrac{x+1}{x+2}$. **D.** $y = \dfrac{-2x+1}{x-3}$.

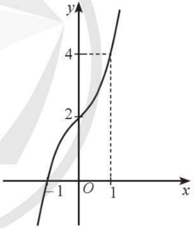
95. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x^2+x-2}{x-2}$ là đường thẳng:

A. $y = -3x + 7$. **B.** $y = 3x + 7$.
C. $y = 3x - 7$. **D.** $y = -3x - 7$.

96. Đường cong ở *Hình 27* là đồ thị của hàm số:

A. $y = 2x^3 + 2$. **B.** $y = x^3 - x^2 + 2$.

C. $y = -x^3 + 3x + 2$. **D.** $y = x^3 + x + 2$.

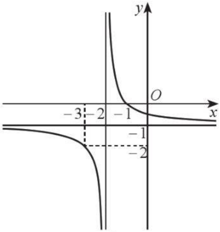


Hình 27

97. Đường cong ở *Hình 28* là đồ thị của hàm số:

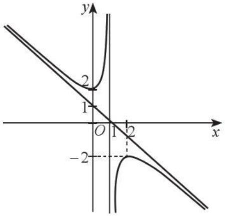
A. $y = \dfrac{-2x+1}{x+1}$. **B.** $y = \dfrac{x+1}{-x-2}$.

C. $y = \dfrac{-x+1}{x+2}$. **D.** $y = \dfrac{x-2}{x+2}$.



Hình 28

98. Đường cong ở *Hình 29* là đồ thị của hàm số:



Hình 29

A. $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2+2x+2}{x+1}$.

C. $y=\dfrac{-x^2+2x-2}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{-x^2+x-2}{x-1}$.

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở câu ***99, 100, 101, 102****, chọn phương án đúng* ***(Đ)*** *hoặc sai* ***(S)****.*

99. Cho hàm số $y = x \,.\, e^x$.

a) $y' = e^x + x\,.\,e^x$.	**Đ**	**S**
b) $y' = 0$ khi $x = -1$, $x = 0$.	**Đ**	**S**
c) $y' > 0$ khi $x \in (-1\,;+\infty)$ và $y' < 0$ khi $x \in (-\infty\,;-1)$.	**Đ**	**S**
d) Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.	**Đ**	**S**

100. Cho hàm số $y = 2^{x^2-1}$.

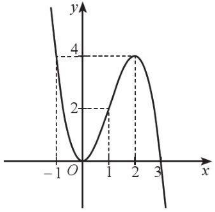
a) $y' = (x^2-1).2^{x^2-2}$.	**Đ**	**S**
b) $y' = 0$ khi $x = -1$, $x = 1$.	**Đ**	**S**
c) $y(-2) = 8$, $y(-1) = 1$, $y(1) = 1$.	**Đ**	**S**
d) Trên đoạn $[-2\,;1]$, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1, giá trị lớn nhất bằng 8.	**Đ**	**S**

101. Cho hàm số $y=\dfrac{3x-2}{1-x}$.

a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.	**Đ**	**S**
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$.	**Đ**	**S**
c) Điểm M nằm trên đồ thị hàm số có hoành độ $x_0 \neq 1$ thì tung độ là $y_0=-3-\dfrac{1}{x_0-1}$.	**Đ**	**S**
d) Tích khoảng cách từ điểm M bất kì nằm trên đồ thị hàm số đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số đó bằng 1.	**Đ**	**S**

102. Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như *Hình 30.*

a) Phương trình $f(x) = 4$ có hai nghiệm $x = -1$, $x = 2$.	**Đ**	**S**
b) Phương trình $f(x) = -1$ có hai nghiệm.	**Đ**	**S**
c) Phương trình $f(x) = 2$ có ba nghiệm.	**Đ**	**S**
d) Phương trình $f(f(x)) = 4$ có sáu nghiệm.	**Đ**	**S**

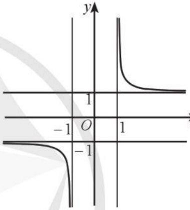


Hình 30

103. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên các khoảng $(-\infty\,;-1)$ và $(1\,;+\infty)$, đồ thị hàm số là đường cong và có bốn đường tiệm cận như *Hình 31.* Căn cứ vào đồ thị hàm số:

a) Viết phương trình đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số.



Hình 31

104. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

a) Tìm điểm cực đại, cực tiểu; giá trị cực đại, cực tiểu của hàm số.

b) Viết phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang không? Vì sao?

d) Tìm công thức xác định hàm số, biết hàm số $f(x)$ có dạng $f(x) = \dfrac{x^2 + bx + c}{x + n}$.

105. Tìm các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị mỗi hàm số sau:

a) $y = \dfrac{3x - 4}{-2x + 5}$; b) $y = \dfrac{3x^3 + x - 2}{x^3 - 8}$; c) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.

106. Tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và tiệm cận xiên (nếu có) của đồ thị mỗi hàm số sau:

a) $y=\dfrac{-3x+2}{x^3+1}$; b) $y=\dfrac{x^2-1}{2x+1}$; c) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

107. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của mỗi hàm số:

a) $y=x^3-2x^2-7x+1$ trên đoạn $[-3\,;2]$;

b) $y=\dfrac{x^2+4x+4}{x+3}$ trên đoạn $[-1\,;3]$;

c) $y=(x^2-2x+2)\,e^x$ trên đoạn $[-2\,;1]$;

d) $y=\ln\sqrt{x^2+1}$ trên đoạn $\left[-\sqrt{3}\,;2\sqrt{2}\right]$;

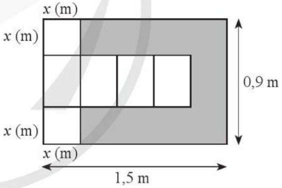
e) $y=x+\cos 2x$ trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

108. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau:

a) $y=x^3-6x^2+9x-2$; b) $y=-x^3-x$; c) $y=\dfrac{2x-4}{x+1}$;

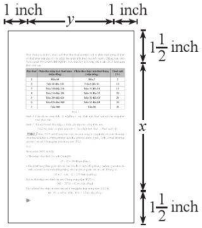
d) $y=\dfrac{-x+3}{x-2}$; e) $y=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$; g) $y=\dfrac{-x^2+4}{2x}$.

109. Từ một miếng bìa có độ dài hai cạnh lần lượt là 0,9 m và 1,5 m như *Hình 32*. Bạn Minh cắt đi phần tô màu xám và gấp lại để được một hình hộp chữ nhật. Gọi V là thể tích hình hộp chữ nhật được tạo thành, V được tính theo x bởi công thức nào? Tìm x để hình hộp tạo thành có thể tích lớn nhất.



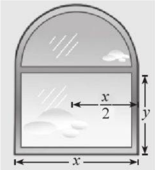
Hình 32

110*. Một nhà in sử dụng các trang giấy hình chữ nhật để in sách. Sau khi để lề trái, lề phải, lề trên và lề dưới theo số liệu được cho ở *Hình 33* thì diện tích phần in chữ trên trang sách là 24 inch^2. Tính kích thước của trang sách để diện tích giấy cần sử dụng là ít nhất?



Hình 33

111*. Một cửa sổ gồm phần dưới là một hình chữ nhật và phần vòm có hình bán nguyệt được mô tả ở *Hình 34*. Tìm x, y để diện tích của cửa sổ lớn nhất, biết chu vi của cửa sổ là 5 m.



Hình 34

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

§1 TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1. A. **2. D.** **3. C.** **4. A.** **5. D.** **6. B.** **7. D.** **8. C.**

9. A. **10. C.** **11. A.** **12.D.** **13. B.** **14 B.** **15. D.** **16. D.**

17. a) **Đ**, b) **Đ**, c) **S**, d) **S**. **18.** a) **Đ**, b) **S**, c) S, d) **Đ**.

19. a) $y' = -x^2 + 2x + 3$. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1 ; 3)$; nghịch biến trên các khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(3 ; +\infty)$.

b) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$; đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

d) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(0 ; 1)$; nghịch biến trên các khoảng $(-1 ; 0)$ và $(1 ; +\infty)$.

e) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty ; 4)$ và $(4 ; +\infty)$.

g) $y' = \dfrac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty ; -4)$ và $(0 ; +\infty)$; nghịch biến trên các khoảng $(-4 ; -2)$ và $(-2 ; 0)$.

20. a) Điểm cực đại: $x = -2$, điểm cực tiểu: $x = 2$.

b) Điểm cực đại: $x = 0$, điểm cực tiểu: $x = -1$ và $x = 1$.

c) Điểm cực đại: $x = -2$, điểm cực tiểu: $x = 0$.

d) Điểm cực đại: $x = 5$, điểm cực tiểu: $x = -1$.

21. a) Hàm số $y = a^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và có $y' = a^x \,.\, \ln a$.

• Nếu $a > 1$ thì $\ln a > 0$ nên $y' > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số $y = a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 1$.

• Nếu $0 < a < 1$ thì $\ln a < 0$ nên $y' < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số $y = a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $0 < a < 1$.

b) Hàm số $y = \log_a x$ có tập xác định là khoảng $(0 ; +\infty)$ và có $y' = \dfrac{1}{x.\ln a}$. Giải thích tương tự câu a.

22. a) Hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4}$ có tập xác định là $(-\infty ; -2] \cup [2 ; +\infty)$ và

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}.$$

Với $x \in (-\infty ; -2)$ thì $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; -2)$.

Với $x \in (2 ; +\infty)$ thì $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(2 ; +\infty)$.

b) Hàm số $y = \ln(x^2 + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và ta có $y' = \dfrac{2x}{x^2+1}$; $y' = 0$ khi $x = 0$.

Bảng xét dấu của y':

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y = \ln(x^2 + 1)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

c) Hàm số $y = 2^{-x^2 + 2x}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và ta có

$y' = (-2x+2).2^{-x^2+2x}\,.\,\ln 2$; $y' = 0$ khi $x = 1$.

Bảng xét dấu của y':

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	

Vậy hàm số $y = 2^{-x^2+2x}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty ; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1 ; +\infty)$.

23. a) Hàm số $y = x \,.\, e^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và $y' = e^x + x \,.\, e^x$; $y' = 0$ khi $x = -1$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$, hàm số không có cực đại.

b) Hàm số $y = (x + 1)^2 \,.\, e^{-x}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và

$y' = 2(x + 1) \,.\, e^{-x} - (x + 1)^2 \,.\, e^{-x}$; $y' = 0$ khi $x = -1$; $x = 1$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$, đạt cực đại tại $x = 1$.

c) Hàm số $y = x^2 \,.\, \ln x$ có tập xác định là $(0\,;+\infty)$ và $y' = 2x \,.\, \ln x - x$; $y' = 0$ khi $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$, hàm số không có cực đại.

d) Hàm số $y = \dfrac{x}{\ln x}$ có tập xác định là $(0\,;+\infty)\backslash\{1\}$ và $y' = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$; $y' = 0$ khi $x = e$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = e$, hàm số không có cực đại.

24. Ta có: $N'(t) = \dfrac{100\,.\,(100+t^2) - 100t\,.\,2t}{(100+t^2)^2} = \dfrac{100\,.\,(100-t^2)}{(100+t^2)^2}$ và $N'(t) = 0$ khi $t = 10$. Bảng xét dấu của $N'(t)$:

t	0		10		$+\infty$
$N'(t)$		+	0	−	

Trong khoảng thời gian 10 giây đầu thì số lượng vi khuẩn sẽ tăng lên.

25. Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t là: $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 14$.

Xét $v'(t) = 6t - 12$; $v'(t) = 0$ khi $t = 2$.

Ta có bảng xét dấu của $v'(t)$:

t	0		2		5
$v'(t)$		−	0	+	

Vận tốc tức thời của chất điểm tăng lên trong khoảng thời gian từ 2 giây đến 5 giây.

§2 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

26. A. **27. C.** **28. C.** **29. B.** **30. D.** **31. A.** **32. B.**

33. C. **34. C.** **35. A.** **36. A.** **37. B.** **38. C.**

39. a) **S**, b) **S**, c) **Đ**, d) **Đ**. **40.** a) **Đ**, b) **Đ**, c) **S**, d) **Đ**.

41. a) $\max\limits_{(0\,;\,3)} y = \dfrac{8}{3}$ tại $x = 1$, hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0\,;3)$.

b) $\max\limits_{(-\sqrt{7}\,;\,\sqrt{7})} y = 10$ tại $x = 0$, $\min\limits_{(-\sqrt{7}\,;\,\sqrt{7})} y = -6$ tại $x = 2, x = -2$.

c) $\min\limits_{\mathbb{R}} y = -1$ tại $x = 0$, hàm số không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

d) $\max\limits_{(-\infty\,;\,1)} y = -3$ tại $x = -1$, hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(-\infty\,;1)$.

42. a) $\max\limits_{[-1;5]} y = 266$ tại $x = 5$, $\min\limits_{[-1;5]} y = -6$ tại $x = 1$.

b) $\max\limits_{\left[-\frac{1}{2};2\right]} y = 4$ tại $x = 0$ và $x = 2$, $\min\limits_{\left[-\frac{1}{2};2\right]} y = 0$ tại $x = \sqrt{2}$.

c) $\max\limits_{[-1;2]} y = 2$ tại $x = 1$, $\min\limits_{[-1;2]} y = -10$ tại $x = -1$.

d) $\max\limits_{[3;4]} y = 5$ tại $x = 4$, $\min\limits_{[3;4]} y = \dfrac{13}{3}$ tại $x = 3$.

e) $\max\limits_{[1;3]} y = 2$ tại $x = 2$, $\min\limits_{[1;3]} y = \sqrt{2}$ tại $x = 1, x = 3$.

g) $\max\limits_{[-4;4]} y = 8$ tại $x = 2\sqrt{2}$, $\min\limits_{[-4;4]} y = -8$ tại $x = -2\sqrt{2}$.

43. a) $\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} y = \dfrac{\pi}{2}$ tại $x = -\dfrac{\pi}{2}$, $\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} y = -\dfrac{\pi}{2}$ tại $x = \dfrac{\pi}{2}$.

b) $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} y = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}$ tại $x = \dfrac{\pi}{4}$, $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} y = 1$ tại $x = 0$.

44. a) $\max\limits_{[-1;2]} y = \dfrac{82}{9}$ tại $x = 2$, $\min\limits_{[-1;2]} y = 2$ tại $x = 0$.

b) $\max\limits_{[0;1]} y = \dfrac{1}{2\sqrt{e}}$ tại $x = \dfrac{1}{2}$, $\min\limits_{[0;1]} y = 0$ tại $x = 0$.

c) $\max\limits_{[-2;3]} y = \ln 18$ tại $x = 3$, $\min\limits_{[-2;3]} y = \ln 2$ tại $x = -1$.

d) $\max\limits_{[1;3]} y = 2$ tại $x = 1$, $\min\limits_{[1;3]} y = 3\ln 3 - 4$ tại $x = 3$.

45. $AB = 2\sqrt{2}$ m.

46. Ứng với $t = \dfrac{3\sqrt[3]{4}}{2}$ thì $C(t)$ đạt giá trị lớn nhất, tức là sau khoảng 2,38 giờ tiêm thì nồng độ của hoá chất trong máu là cao nhất.

47. a) 0,99708 kg/dm^3.

b) Ở nhiệt độ khoảng 4 ^{o}C thì khối lượng riêng của nước là lớn nhất khoảng 1,00000 kg/ dm^3.

§3 ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

48. A. **49. D.** **50. D.** **51. A.** **52. C.** **53. A.** **54. D.**

55. A. **56. A.** **57. A.** **58. B.** **59. C.** **60. A.** **61. B.**

62. a) **Đ**, b) **S**, c) **S**, d) **S**.

63. a) Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\dfrac{3}{2}$; tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}$.

b) Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 4$; tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -3$.

c) Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 0$; tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.

d) Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$; tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -2$.

64. a) Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -3$; tiệm cận xiên là đường thẳng $y = 5x - 2$.

b) Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 0$; tiệm cận xiên là đường thẳng $y = -7x$.

c) Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$; tiệm cận xiên là đường thẳng $y = -x - 4$.

d) Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$; tiệm cận xiên là đường thẳng $y = 2x + 7$.

65. a) Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$, $x = 2$; tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.

b) Tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -\dfrac{1}{4}$.

c) Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$; tiệm cận xiên là đường thẳng $y = -3x - 4$.

66. a) Tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 100$.

b) Do đường thẳng $y = 100$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = S(t)$ nên khi t càng lớn thì tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sẽ tiến gần đến mức 100 từ/phút và không thể vượt mức 100 từ/phút cho dù thời gian t có kéo dài đến vô cùng.

67. a) $C(x) = \dfrac{20x + 100\,000}{x}$ (nghìn đồng).

b) Tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 20$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0\,;+\infty)$.

d) Do đường thẳng $y = 20$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = C(x)$ nên khi x càng lớn thì chi phí để tạo ra 1 sản phẩm sẽ giảm gần đến mức 20 nghìn đồng và không thể giảm hơn 20 nghìn đồng cho dù số sản phẩm sản xuất được có thể lớn vô cùng.

§4 KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

68. A. **69. D.** **70. D.** **71. B.**

72. C. **73. A.** **74. D.** **75. B.**

76. • Căn cứ hình dáng của đồ thị hàm số, ta có: $a > 0$.

• Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0 ; d)$ nằm phía trên trục hoành nên điểm đó có tung độ dương.

• Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm ở hai phía trục tung.

• Trung điểm của đoạn nối hai điểm cực trị x_1, x_2 nằm bên phải trục tung nên tổng hai điểm cực trị x_1, x_2 dương hay $\frac{-2b}{3a}$ dương. Mà $a > 0$ nên $b < 0$.

Đáp án: a) **Đ**, b) **Đ**, c) **S**, d) **Đ**.

77. • Tiệm cận đứng của đồ thị là đường thẳng $x = -n$ nằm bên trái trục tung nên $-n < 0$ hay $n > 0$.

• Tiệm cận xiên có hệ số góc là a có hướng đi lên từ trái sang phải nên $a > 0$.

• Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0 ; \frac{c}{n})$ nằm phía trên trục hoành nên $c > 0$.

• Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ âm nên phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt. Do đó, $-\frac{b}{a} < 0$ hay $b > 0$.

Đáp án: a) **S**, b) **Đ**, c) **Đ**, d) **S**.

78. a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty ; 0)$ và $(2 ; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(0 ; 2)$.

Điểm cực đại: $x = 0$, điểm cực tiểu: $x = 2$.

b) Trên đoạn $[-1 ; 2]$, hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 2 tại $x = 0$, đạt giá trị nhỏ nhất bằng -2 tại $x = -1$, $x = 2$.

c) $(2 ; -2)$.

d) $(0 ; 2)$ và $(3 ; 2)$.

e) Đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm.

g) $x \in (-1; 3)\backslash\{0; 2\}$.

h) $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

79. a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-1; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-3; -2)$ và $(-2; -1)$.

Điểm cực đại: $x = -3$, điểm cực tiểu: $x = -1$.

b) Tiệm cận đứng: $x = -2$, tiệm cận xiên: $y = x + 1$.

c) Số nghiệm của phương trình $f(x) = 3$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)$ và đường thẳng $y = 3$. Căn cứ vào đồ thị hàm số, phương trình $f(x) = 3$ có hai nghiệm phân biệt.

d) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$.

80. Học sinh tự làm.

81. Học sinh tự làm.

82*. a) $y = \dfrac{1}{32}x^3 + \dfrac{3}{16}x^2$.

b) Thay $x = -3$, ta được $y = \dfrac{27}{32}$. Vậy khi máy bay cách vị trí hạ cánh theo phương ngang 3 dặm thì máy bay cách mặt đất $\dfrac{27}{32} = 0,84375$ (dặm).

c) Thay $y = 0,5$ ta được $x = -2$, $x = -2 \pm 2\sqrt{3}$. Do $x \in [-4; 0]$ nên $x = -2$. Vậy khi ở độ cao 0,5 dặm, máy bay cách vị trí hạ cánh theo phương ngang 2 dặm.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

83. D.	**84. C.**	**85. A.**	**86. B.**	**87. D.**	**88. B.**	**89. B.**	**90. A.**
91. A.	**92. A.**	**93. C.**	**94. D.**	**95. B.**	**96. D.**	**97. B.**	**98. C.**

99. a) **Đ**, b) S, c) **Đ**, d) S. **100.** a) S, b) S, c) **Đ**, d) S. **101.** a) **Đ**, b) S, c) **Đ**, d) **Đ**.

102. • Đường thẳng $y = 4$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hai điểm có hoành độ bằng -1 và 2 nên phương trình $f(x) = 4$ có hai nghiệm $x = -1$, $x = 2$.

• Đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại một điểm nên phương trình $f(x) = -1$ có một nghiệm.

• Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm nên phương trình $f(x) = 2$ có ba nghiệm.

• Ta có: $f(f(x)) = 4$ khi $f(x) = -1$ hoặc $f(x) = 2$.

Với $f(x) = -1$, phương trình có một nghiệm.

Với $f(x) = 2$, phương trình có ba nghiệm phân biệt. Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

Đáp án: a) **Đ**, b) **S**, c) **Đ**, d) **S**.

103. a) Tiệm cận đứng: $x = -1$, $x = 1$; tiệm cận ngang: $y = -1$, $y = 1$.

b) Bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	||		||	$-$	
y	-1	$\searrow$	$-\infty$ ||		|| $+\infty$	$\searrow$	1

104. a) Điểm cực đại: $x = -4$, điểm cực tiểu $x = 0$, giá trị cực đại $y_{CĐ} = -6$, giá trị cực tiểu $y_{CT} = 2$.

b) Tiệm cận đứng: $x = -2$.

c) Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang. Vì $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$.

105. a) Tiệm cận đứng: $x = \dfrac{5}{2}$, tiệm cận ngang: $y = -\dfrac{3}{2}$.

b) Tiệm cận đứng: $x = 2$, tiệm cận ngang: $y = 3$.

c) Tiệm cận đứng: $x = 0$, hai tiệm cận ngang: $y = 1$, $y = -1$.

106. a) Tiệm cận đứng là: $x = -1$, tiệm cận ngang là: $y = 0$, đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.

b) Tiệm cận đứng là: $x = -\dfrac{1}{2}$, đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang, tiệm cận xiên là: $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$.

c) Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng, hai tiệm cận ngang là: $y = 1$, $y = -1$, đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.

107. a) $\min\limits_{[-3\,;\,2]} y = -23$, $\max\limits_{[-3\,;\,2]} y = 5$. b) $\min\limits_{[-1\,;\,3]} y = \dfrac{1}{2}$, $\max\limits_{[-1\,;\,3]} y = \dfrac{25}{6}$.

c) $\min\limits_{[-2\,;\,1]} y = \dfrac{10}{e^2}$, $\max\limits_{[-2\,;\,1]} y = e$. d) $\min\limits_{[-\sqrt{3}\,;\,2\sqrt{2}]} y = 0$, $\max\limits_{[-\sqrt{3}\,;\,2\sqrt{2}]} y = \ln 3$.

e) $\min\limits_{\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]} y = \dfrac{5\pi}{12} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\max\limits_{\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]} y = \dfrac{\pi}{4}$.

108. Học sinh tự làm.

109. $V = x^2 \,.\, (0{,}9 - 2x)$; $x = 0{,}3$ m.

110*. Diện tích một trang giấy là: $S = (x+3)(y+2)$ (inch^2).

Diện tích phần in chữ là: $xy = 24$. Suy ra $y = \dfrac{24}{x}$.

Khi đó, $S = (x+3)\left(\dfrac{24}{x} + 2\right) = 30 + 2x + \dfrac{72}{x}$.

S nhỏ nhất khi $x = 6$, $y = 4$. Vậy, kích thước của trang sách là 9 inch × 6 inch.

111*. Chu vi của cửa sổ là: $x + 2y + \dfrac{\pi x}{2} = 5$. Do đó, $y = \dfrac{10-(2+\pi)x}{4}$.

Diện tích của cửa sổ là: $S = xy + \pi\dfrac{x^2}{8} = \dfrac{-(4+\pi)x^2 + 20x}{8}$.

Diện tích của cửa sổ lớn nhất khi $x = \dfrac{10}{4+\pi} \approx 1{,}4$ (m), $y = \dfrac{5}{4+\pi} \approx 0{,}7$ (m).

Chương II TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

§1 VECTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khái niệm vectơ trong không gian

• Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Chú ý

– Cho đoạn thẳng AB trong không gian. Nếu ta chọn điểm đầu là A, điểm cuối là B thì ta có một vectơ, kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là "vectơ AB".

– Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ, vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}, ...$

• Các khái niệm có liên quan đến vectơ trong không gian như: giá của vectơ, độ dài của vectơ, vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng, vectơ-không, hai vectơ bằng nhau, hai vectơ đối nhau,… được phát biểu tương tự như trong mặt phẳng.

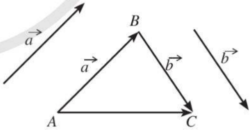
2. Các phép toán vectơ trong không gian

a) Tổng và hiệu của hai vectơ trong không gian

• Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Lấy một điểm A tuỳ ý, vẽ

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}.$$

Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là *tổng của hai vectơ* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$, kí hiệu là $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.



Hình 1

Chú ý

– Phép lấy tổng của hai vectơ còn được gọi là *phép cộng vectơ*.

– Phép cộng vectơ trong không gian cũng có các tính chất như phép cộng vectơ trong mặt phẳng, chẳng hạn: Phép cộng vectơ trong không gian cũng có các tính chất giao hoán, kết hợp, cộng với vectơ-không. Do đó, ta cũng định nghĩa được tổng của ba vectơ trong không gian.

– Khi thực hiện phép cộng vectơ trong không gian, ta vẫn có thể áp dụng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành như đối với vectơ trong mặt phẳng.

• Đối với vectơ trong không gian, ta cũng có các quy tắc sau:

– Với ba điểm A, B, C trong không gian, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (*Quy tắc ba điểm*);

– Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (*Quy tắc hình bình hành*);

– Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$ (*Quy tắc hình hộp*).

• Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Hiệu của vectơ $\vec{a}$ và vectơ $\vec{b}$ là tổng của vectơ $\vec{a}$ và vectơ đối của vectơ $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}$.

• Phép lấy hiệu của hai vectơ còn được gọi là *phép trừ vectơ*.

Với ba điểm O, A, B trong không gian, ta có: $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$ (*Quy tắc hiệu*).

b) Tích của một số với một vectơ trong không gian

Cho số thực $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

• Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$;

• Có độ dài bằng $|k| . |\vec{a}|$.

Quy ước: $0\vec{a}=\vec{0}$, $k\vec{0}=\vec{0}$. Do đó $k\vec{a}=\vec{0}$ khi và chỉ khi $k=0$ hoặc $\vec{a}=\vec{0}$.

Chú ý

• Phép lấy tích của một số với một vectơ gọi là *phép nhân một số với một vectơ*.

• Phép nhân một số với một vectơ trong không gian có các tính chất sau:

Với hai vectơ bất kì $\vec{a}, \vec{b}$ và hai số thực h, k, ta có:

+ $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$; $k(\vec{a}-\vec{b})=k\vec{a}-k\vec{b}$;

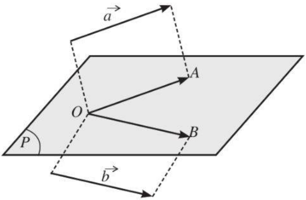
+ $(h+k)\vec{a}=h\vec{a}+k\vec{a}$;

+ $h(k\vec{a})=(hk)\vec{a}$;

+ $1\vec{a}=\vec{a}$; $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$.

• Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ là cùng phương khi và chỉ khi có một số thực $k \neq 0$ sao cho $\vec{a}=k\vec{b}$.

c) Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian



Hình 2

- Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O tuỳ ý và vẽ hai vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

  Góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ trong không gian là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$, kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$.

***Chú ý*:** $0° \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq 180°$.

- Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, là một số thực được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$, ở đó $(\vec{a}, \vec{b})$ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$.

***Quy ước*:** Tích vô hướng của một vectơ bất kì với vectơ $\vec{0}$ là số 0.

Chú ý

- Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian có các tính chất sau:

  Với các vectơ bất kì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và số thực k tuỳ ý, ta có:

  + $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán);

  + $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối);

  + $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$;

  + $\vec{a}^2 \geq 0$, trong đó $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$. Ngoài ra $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

- Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ thì $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Chỉ ra các yếu tố của vectơ

Ví dụ 1 Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Hãy chỉ ra hai vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình lăng trụ sao cho hai vectơ đó:

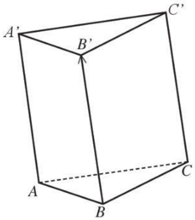
a) Bằng vectơ $\overrightarrow{BB'}$;

b) Là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{BB'}$.

Giải. (*Hình 3*)

a) Do các vectơ $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{CC'}$ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{BB'}$ và $AA' = CC' = BB'$ (tính chất hình lăng trụ) nên $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'}$.

Vậy hai vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình lăng trụ và bằng vectơ $\overrightarrow{BB'}$ là $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{CC'}$.



Hình 3

b) Do các vectơ $\overrightarrow{A'A}$, $\overrightarrow{C'C}$ ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{BB'}$ và $AA' = CC' = BB'$ (tính chất hình lăng trụ) nên hai vectơ $\overrightarrow{A'A}$, $\overrightarrow{C'C}$ là hai vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{BB'}$.

Vấn đề 2. Chứng minh các đẳng thức về vectơ

Ví dụ 2 Cho tứ diện $ABCD$ (*Hình 4*). Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$;

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

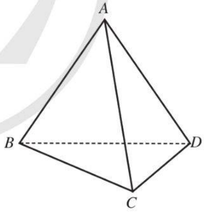
Giải

a) Biến đổi vế trái của đẳng thức, ta được:

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}$$

$$= \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

Vậy $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.



Hình 4

b) Biến đổi vế trái của đẳng thức, ta được:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$$

$$= \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}.$$

Vậy $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

Ví dụ 3 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm tam giác $AB'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{A'C} = 3\overrightarrow{A'G}$.

Giải. (*Hình 5*)

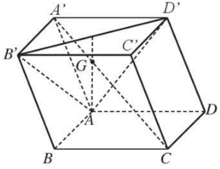
Theo quy tắc hình hộp, ta có:

$$\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{A'C}.$$

Mặt khác, áp dụng tính chất trọng tâm trong tam giác $AB'D'$, ta được:

$$\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'} = 3\overrightarrow{A'G}.$$

Do đó, $\overrightarrow{A'C} = 3\overrightarrow{A'G}$.



Hình 5

Vấn đề 3. Ứng dụng của tích vô hướng

Ví dụ 4 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (*Hình 6*). Tính:

a) $\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{D'C'}$; $\overrightarrow{D'A} \cdot \overrightarrow{BC}$;

b) Các góc $(\overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{B'C'})$; $(\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{BD})$.

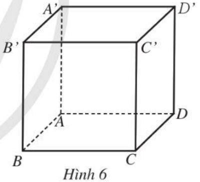
Giải

a) Sử dụng định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ trong không gian, ta có:

$$\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{D'C'} = \left|\overrightarrow{A'B}\right| \cdot \left|\overrightarrow{D'C'}\right| \cdot \cos(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{D'C'})$$

$$= a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'B'})$$

$$= a^2\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = a^2.$$



Hình 6

$$\overrightarrow{D'A} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{BC} = -\left|\overrightarrow{AD'}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \cos(\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{BC})$$

$$= -a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{AD}) = -a^2\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = -a^2.$$

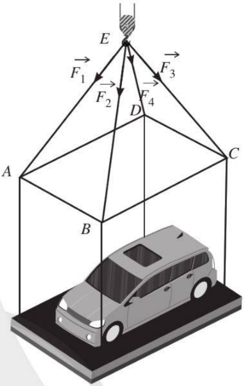
b) $(\overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{B'C'}) = (\overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{A'D'}) = 45^\circ$.

$(\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BD}) = \widehat{C'BD}$.

Do tam giác $C'BD$ là tam giác đều nên $\widehat{C'BD} = 60^\circ$. Vậy $(\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{BD}) = 60^\circ$.

Vấn đề 4. Ứng dụng

Ví dụ 5 Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° (*Hình 7*). Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị). Biết rằng các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là 4 700 N và trọng lượng của khung sắt là 3 000 N.

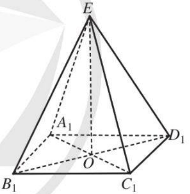


Hình 7

Giải. (*Hình 8*)

Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là các điểm sao cho

$$\overrightarrow{EA_1} = \overrightarrow{F_1},\ \overrightarrow{EB_1} = \overrightarrow{F_2},\ \overrightarrow{EC_1} = \overrightarrow{F_3},\ \overrightarrow{ED_1} = \overrightarrow{F_4}.$$



Hình 8

Do các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là 4 700 N nên $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right| = 4\,700$ (N).

Gọi O là tâm của hình chữ nhật $A_1B_1C_1D_1$. Khi đó, O là trung điểm của A_1C_1 và B_1D_1.

Sử dụng quy tắc trung điểm ta có:

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3} = 2\overrightarrow{EO} \text{ và } \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_4} = 2\overrightarrow{EO}.$$

Suy ra, $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4} = 4\overrightarrow{EO}$.

Mặt khác, do các cạnh EA, EB, EC, ED tạo với với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° nên $\widehat{EA_1O} = \widehat{EB_1O} = \widehat{EC_1O} = \widehat{ED_1O} = 60^\circ$, do đó tam giác EA_1C_1 là tam giác đều cạnh 4 700 (N) với đường cao $EO = 2350\sqrt{3}$ (N).

Do khung sắt ở vị trí cân bằng nên $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4} = \overrightarrow{P}$, ở đó $\overrightarrow{P}$ là trọng lực tác dụng lên chiếc xe ô tô và khung sắt. Ta tính được tổng trọng lực có độ lớn là $4\left|\overrightarrow{OE}\right| = 9\,400\sqrt{3}$ (N).

Vậy trọng lực của ô tô bằng $9\,400\sqrt{3} - 3\,000 \approx 13\,281$ (N).

C. BÀI TẬP

1. Cho tứ diện *ABCD*. Lấy *G* là trọng tâm tam giác *BCD*. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

B. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CG}$.

D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

2. Cho hình hộp *ABCD.A'B'C'D'*. Phát biểu nào nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AC'}$.

B. $\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{AC'}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{AC'}$.

D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{AC'}$.

3. Phát biểu nào nào sau đây là đúng?

A. Với hai vectơ bất kì $\vec{a}$, $\vec{b}$ và số thực *k*, ta có: $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$.

B. Với hai vectơ bất kì $\vec{a}$, $\vec{b}$ và số thực *k*, ta có: $k(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}k+\vec{b}k$.

C. Với hai vectơ bất kì $\vec{a}$, $\vec{b}$ và số thực *k*, ta có: $(\vec{a}+\vec{b})k=\vec{a}k+\vec{b}k$.

D. Với hai vectơ bất kì $\vec{a}$, $\vec{b}$ và số thực *k*, ta có: $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+\vec{b}k$.

4. Cho hình lập phương *ABCD.A'B'C'D'*. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{B'C}$ bằng:

A. 30°.

B. 45°.

C. 120°.

D. 60°.

5. Cho hình lập phương *ABCD.A'B'C'D'*. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DA'}$ bằng:

A. 30°.

B. 45°.

C. 120°.

D. 60°.

6. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ tạo với nhau một góc 60° và $|\vec{a}|=3$ cm, $|\vec{b}|=4$ cm. Khi đó $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ bằng:

A. 12.

B. 6.

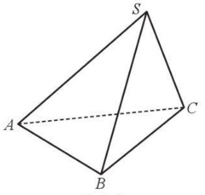
C. $6\sqrt{3}$.

D. -6.

*Trong mỗi ý a), b), c), d) ở câu 7, **8**, chọn phương án đúng (**Đ**) hoặc sai (**S**).*

7. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$ (*Hình 9*).

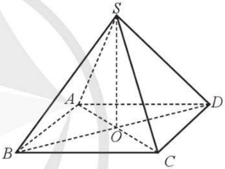
a) Tam giác ABC vuông tại A và tam giác SAB đều.	**Đ**	**S**
b) $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0$ và $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ$.	**Đ**	**S**
c) $\overrightarrow{SC}\,.\,\overrightarrow{AB} = \dfrac{a^2}{2}$.	**Đ**	**S**
d) $\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \dfrac{1}{2}$.	**Đ**	**S**



Hình 9

8. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh đều bằng a (*Hình 10*).

a) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông.	**Đ**	**S**
b) Tam giác SAC vuông cân tại S.	**Đ**	**S**
c) $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AC}) = 45^\circ$.	**Đ**	**S**
d) $\overrightarrow{SA}\,.\,\overrightarrow{AC} = -a^2$.	**Đ**	**S**



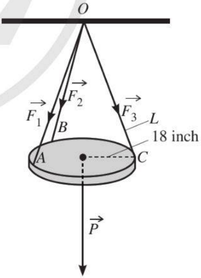
Hình 10

9*. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn (*Hình 11*). Độ dài của ba đoạn dây OA, OB, OC đều bằng L (inch). Trọng lượng của chiếc đèn là 24 N và bán kính của chiếc đèn là 18 inch (1 inch = 2,54 cm). Gọi F là độ lớn của các lực căng $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ trên mỗi sợi dây. Khi đó, $F = F(L)$ là một hàm số với biến số là L.

a) Xác định công thức tính hàm số $F = F(L)$.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $F = F(L)$.

c) Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây, biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 10 N.



Hình 11

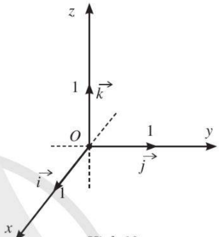
§2 TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hệ trục toạ độ trong không gian

Hệ gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc được gọi là *hệ trục toạ độ vuông góc* $Oxyz$ trong không gian, hay đơn giản gọi là hệ toạ độ $Oxyz$.

***Chú ý*:** Ta gọi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các *vectơ đơn vị* trên các trục Ox, Oy, Oz.
Trong hệ toạ độ $Oxyz$ (*Hình 12*), ta gọi: điểm O là gốc toạ độ; Ox là trục hoành, Oy là trục tung, Oz là trục cao; các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx) là các mặt phẳng toạ độ.



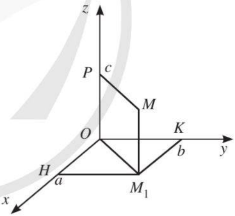
Hình 12

Không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ còn được gọi là *không gian Oxyz*.

2. Toạ độ của một điểm

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm M (*Hình 13*).

- Xác định hình chiếu M_1 của điểm M trên mặt phẳng (Oxy). Trong mặt phẳng toạ độ (Oxy), tìm hoành độ a, tung độ b của điểm M_1.
- Xác định hình chiếu P của điểm M trên trục cao Oz, điểm P ứng với số c trên trục Oz. Số c là cao độ của điểm M.



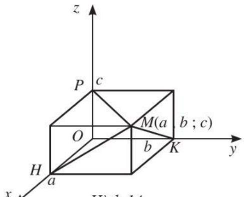
Hình 13

Bộ số $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ là *toạ độ* của điểm M trong không gian toạ độ $Oxyz$, kí hiệu là $M(a\ ;\ b\ ;\ c)$.

Chú ý

- Toạ độ của một điểm M trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ luôn tồn tại và duy nhất.
- Người ta còn có thể xác định toạ độ điểm M theo cách sau (*Hình 14*):

+ Xác định hình chiếu H của điểm M trên trục hoành Ox, điểm H ứng với số a trên trục Ox. Số a là hoành độ của điểm M.



Hình 14

+ Xác định hình chiếu K của điểm M trên trục tung Oy, điểm K ứng với số b trên trục Oy. Số b là tung độ của điểm M.

+ Xác định hình chiếu P của điểm M trên trục cao Oz, điểm P ứng với số c trên trục Oz. Số c là cao độ của điểm M.

Khi đó, bộ số $(a ; b ; c)$ là toạ độ của điểm M trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$.

3. Toạ độ của một vectơ

- Toạ độ của điểm M được gọi là toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$.

$$\overrightarrow{OM} = (a ; b ; c) \Leftrightarrow M(a ; b ; c).$$

- Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, toạ độ của một vectơ $\vec{u}$ là toạ độ của điểm A, trong đó A là điểm sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.

  Nếu $\vec{u}$ có toạ độ $(a ; b ; c)$ thì ta viết $\vec{u} = (a ; b ; c)$, trong đó a gọi là hoành độ, b gọi là tung độ và c gọi là cao độ của vectơ $\vec{u}$.

- Với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các *vectơ đơn vị* trên các trục Ox, Oy, Oz. Ta có:

  Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, nếu $\vec{u} = (a ; b ; c)$ thì $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

  Ngược lại, nếu $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ thì $\vec{u} = (a ; b ; c)$.

Chú ý: Với $\vec{u} = (x_1 ; y_1 ; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2 ; y_2 ; z_2)$, ta có: $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2. \end{cases}$

- Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A ; y_A ; z_A)$ và $B(x_B ; y_B ; z_B)$.

  Khi đó, ta có: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Tìm toạ độ của điểm

Ví dụ 1 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $A(3 ; -2 ; -1)$. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các mặt phẳng toạ độ (Oxy), (Oyz), (Ozx). Tìm toạ độ của các điểm A_1, A_2, A_3.

Giải

Gọi $A_1(x_1 ; y_1 ; z_1)$, $A_2(x_2 ; y_2 ; z_2)$, $A_3(x_3 ; y_3 ; z_3)$. Với $A(3 ; -2 ; -1)$, đặt $x_A = 3$, $y_A = -2$, $z_A = -1$.

+ Vì A_1 nằm trên mặt phẳng (Oxy) nên $x_1 = x_A = 3$; $y_1 = y_A = -2$ và $z_1 = 0$. Do đó $A_1(3 ; -2 ; 0)$.

+ Vì A_2 nằm trên mặt phẳng (Oyz) nên $x_2 = 0$, $y_2 = y_A = -2$; $z_2 = z_A = -1$. Do đó $A_2(0 ; -2 ; -1)$.

+ Vì A_3 nằm trên mặt phẳng (Oxz) nên $x_3 = x_A = 3$; $y_3 = 0$; $z_3 = z_A = -1$. Do đó $A_3(3 ; 0 ; -1)$.

Ví dụ 2 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $A(-2 ; 3 ; 4)$. Gọi H, K, P lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các trục Ox, Oy, Oz. Tìm toạ độ của các điểm H, K, P.

Giải

Vì $H(x_H ; y_H ; z_H)$ là hình chiếu vuông góc của điểm $A(-2 ; 3 ; 4)$ trên trục Ox nên $x_H = -2$, $y_H = 0$, $z_H = 0$. Do đó $H(-2 ; 0 ; 0)$.

Vì $K(x_K ; y_K ; z_K)$ là hình chiếu vuông góc của điểm $A(-2 ; 3 ; 4)$ trên trục Oy nên $x_K = 0$, $y_K = 3$, $z_K = 0$. Do đó $K(0 ; 3 ; 0)$.

Vì $P(x_P ; y_P ; z_P)$ là hình chiếu vuông góc của điểm $A(-2 ; 3 ; 4)$ trên trục Oz nên $x_P = 0$, $y_P = 0$, $z_P = 4$. Do đó $P(0 ; 0 ; 4)$.

Ví dụ 3 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(4 ; 6 ; -5)$, $B(5 ; 7 ; -4)$, $C(5 ; 6 ; -4)$, $D'(2 ; 0 ; 2)$. Tìm toạ độ các đỉnh còn lại của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1 ; 1 ;1)$.

Gọi toạ độ của điểm D là $(x_D ; y_D ; z_D)$, ta có: $\overrightarrow{DC} = (5 - x_D ; 6 - y_D ; -4 - z_D)$.

Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Suy ra: $\begin{cases} 5 - x_D = 1 \\ 6 - y_D = 1 \\ -4 - z_D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 5 \\ z_D = -5. \end{cases}$ Vậy toạ độ của điểm $D(4 ; 5 ; -5)$.

Tương tự, từ các đẳng thức vectơ $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$, ta suy ra được toạ độ của các điểm còn lại $A'(2 ; 1 ; 2)$, $B'(3 ; 2 ; 3)$ và $C'(3 ; 1 ; 3)$.

Vấn đề 2. Tìm toạ độ của vectơ

Ví dụ 4 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có ba đỉnh $A(1 ; -1 ; 1)$, $B(0 ; 1 ; 2)$ và $C(1 ; 0 ; 1)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm toạ độ của điểm D.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (0 - 1 ; 1 - (-1) ; 2 - 1)$ hay $\overrightarrow{AB} = (-1 ; 2 ; 1)$.

b) Gọi toạ độ của điểm D là $(x_D ; y_D ; z_D)$, ta có: $\overrightarrow{DC} = (1 - x_D ; -y_D ; 1 - z_D)$.

Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_D = -1 \\ -y_D = 2 \\ 1 - z_D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = -2 \\ z_D = 0. \end{cases}$$

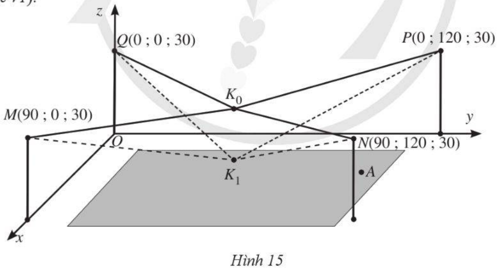
Vậy toạ độ của điểm $D(2 ; -2 ; 0)$.

Vấn đề 3. Ứng dụng

Ví dụ 5 Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn.

Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90 ; 0 ; 30)$, $N(90 ; 120 ; 30)$, $P(0 ; 120 ; 30)$, $Q(0 ; 0 ; 30)$ (*Hình 15*).

Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A, camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 có cao độ bằng 19 (*Nguồn: https://abiturloesung.de; Abitur Bayern 2016 Geometrie VI*).



Hình 15

Tìm toạ độ của các điểm K_0, K_1 và vectơ $\overrightarrow{K_0K_1}$.

Giải

Gọi $I(x_I ; y_I ; z_I)$ là tâm của hình chữ nhật $MNPQ$.

Ta có $\overrightarrow{MI} = (x_I - 90 ; y_I - 0 ; z_I - 30)$, $\overrightarrow{IP} = (0 - x_I ; 120 - y_I ; 30 - z_I)$.

I là trung điểm của MP khi và chỉ khi $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{IP} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I - 90 = 0 - x_I \\ y_I - 0 \ = 120 - y_I \\ z_I - 30 = 30 - z_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 45 \\ y_I = 60 \\ z_I = 30. \end{cases}$

Vậy toạ độ điểm $I(45 ; 60 ; 30)$.

Các điểm I, K_0, K_1 nằm trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Oxy). Mà K_0 có cao độ bằng 25 nên $K_0(45 ; 60 ; 25)$; K_1 có cao độ bằng 19 nên $K_1(45 ; 60 ; 19)$. Suy ra $\overrightarrow{K_0K_1} = (0 ; 0 ; -6)$.

C. BÀI TẬP

10. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1 ; 5 ; 3)$. Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OA}$ là:

A. $(-1 ; 5 ; 3)$. **B.** $(1 ; -5; -3)$.

C. $(0 ; 5 ; 3)$. **D.** $(-1 ; 5 ; 0)$.

11. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (1 ; -2 ; 4)$ và điểm A. Biết $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$. Toạ độ của điểm A là:

A. $(1 ; 2 ; 4)$. **B.** $(1 ; -2 ; 4)$.

C. $(-1 ; 2 ; -4)$. **D.** $(-1 ; -2 ; -4)$.

12. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = -3\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$. Toạ độ của vectơ $\vec{u}$ là:

A. $(3 ; -1 ; 5)$. **B.** $(-3 ; 1 ; 5)$.

C. $(-5 ; 1 ; -3)$. **D.** $(-3 ; 1 ; -5)$.

13. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2 ; -1 ; 4)$ và $B(1 ; -3 ; -1)$. Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là:

A. $(-3 ; 2 ; 5)$. **B.** $(3 ; -2 ; -3)$.

C. $(3 ; -2 ; -5)$. **D.** $(-3 ; -4 ; 3)$.

14. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (1 ; 2 ; 3)$ và điểm $A(-1; -1 ; 1)$. Toạ độ điểm C thoả mãn $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$ là:

A. $(0 ; 1 ; 4)$. **B.** $(-2 ; -3 ; -2)$.

C. $(2 ; 3 ; 2)$. **D.** $(0 ; -1 ; -4)$.

*Trong mỗi ý a), b), c), d) ở câu **15**, **16**, chọn phương án đúng (**Đ**) hoặc sai (**S**).*

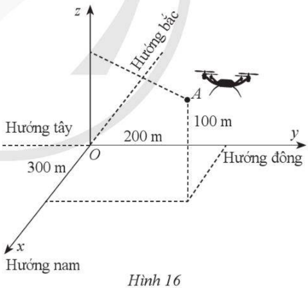
15. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'(1 ; 0 ; 1)$, $B'(2 ; 1 ; 2)$, $D'(1 ; -1 ; 1)$, $C(4 ; 5 ; -5)$.

a) Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{A'D'}$ là $(0 ; -1 ; 0)$.	**Đ**	**S**
b) Gọi toạ độ của điểm B là $(x_B ; y_B ; z_B)$, ta có toạ độ của vectơ $\overrightarrow{BC}$ là $(x_B - 4 ; y_B - 5 ; z_B + 5)$.	**Đ**	**S**
c) Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'D'}$.	**Đ**	**S**
d) Toạ độ điểm B là $(4 ; 4 ; -5)$.	**Đ**	**S**

16. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hình bình hành $ABCD$ có ba đỉnh $A(1 ; 2 ; 3)$, $B(5 ; 0 ; -1)$ và $C(4 ; 3 ; 6)$.

a) Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $(4 ; -2 ; -4)$.	**Đ**	**S**
b) Gọi toạ độ của điểm D là $(x_D ; y_D ; z_D)$, ta có toạ độ của vectơ $\overrightarrow{CD}$ là $(x_D - 4; y_D - 3 ; z_D - 6)$.	**Đ**	**S**
c) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.	**Đ**	**S**
d) Toạ độ của điểm D là $(8 ; 1 ; 2)$.	**Đ**	**S**

17. Trong quá trình cất cánh của một máy bay không người lái: Ban đầu máy bay ở vị trí A, máy bay cách vị trí điều khiển 300 m về phía nam và 200 m về phía đông, đồng thời cách mặt đất 100 m (*Hình 16*). Một phút sau, máy bay ở vị trí B cách vị trí điều khiển 1 200 m về phía nam và 2 100 m về phía đông, đồng thời cách mặt đất 250 m.



Hình 16

Chọn hệ trục toạ độ *Oxyz* với gốc O trùng với vị trí điều khiển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox có hướng trùng với hướng nam, trục Oy có hướng trùng với hướng đông, trục Oz vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, mỗi đơn vị trên trục tương ứng với 1 m. Hãy xác định toạ độ vectơ dịch chuyển $\overrightarrow{AB}$ của máy bay không người lái đó.

§3 BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Biểu thức toạ độ của phép cộng hai vectơ, phép trừ hai vectơ, phép nhân một số với một vectơ

Nếu $\vec{u} = (x_1 ; y_1 ; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2 ; y_2 ; z_2)$ thì

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2 \ ; \ y_1 + y_2 \ ; \ z_1 + z_2);$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2 \ ; \ y_1 - y_2 \ ; \ z_1 - z_2);$$

$$m\vec{u} = (mx_1 \ ; \ my_1 \ ; \ mz_1) \text{ với } m \in \mathbb{R}.$$

***Nhận xét*:** Hai vectơ $\vec{u} = (x_1 ; y_1 ; z_1)$, $\vec{v} = (x_2 ; y_2 ; z_2)$ ($\vec{v} \neq \vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có một số thực m sao cho $\begin{cases} x_1 = mx_2 \\ y_1 = my_2 \\ z_1 = mz_2. \end{cases}$

2. Toạ độ trung điểm đoạn thẳng. Toạ độ trọng tâm tam giác

- Cho hai điểm $A(x_A ; y_A ; z_A)$ và $B(x_B ; y_B ; z_B)$. Nếu $M(x_M ; y_M ; z_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; \ y_M = \frac{y_A + y_B}{2}; \ z_M = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

- Cho tam giác ABC có $A(x_A ; y_A ; z_A)$, $B(x_B ; y_B ; z_B)$, $C(x_C ; y_C ; z_C)$. Nếu $G(x_G ; y_G ; z_G)$ là trọng tâm tam giác ABC thì

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

3. Biểu thức toạ độ của tích vô hướng

Nếu $\vec{u} = (x_1 ; y_1 ; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2 ; y_2 ; z_2)$ thì $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Nhận xét

- Nếu $\vec{a} = (x ; y ; z)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- Nếu $A(x_1 ; y_1 ; z_1)$ và $B(x_2 ; y_2 ; z_2)$ thì

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

- Với hai vectơ $\vec{u} = (x_1 ; y_1 ; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2 ; y_2 ; z_2)$ khác vectơ $\vec{0}$, ta có:

  + $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

  + $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$.

4. Cách tìm toạ độ của một vectơ vuông góc với hai vectơ cho trước

Cho hai vectơ $\vec{u} = (x_1 ; y_1 ; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2 ; y_2 ; z_2)$ không cùng phương.

Khi đó, vectơ $\vec{w} = (y_1z_2 - y_2z_1 ; z_1x_2 - z_2x_1 ; x_1y_2 - x_2y_1)$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Nhận xét

- Vectơ $\vec{w} = (y_1z_2 - y_2z_1 ; z_1x_2 - z_2x_1 ; x_1y_2 - x_2y_1)$ còn được gọi là *tích có hướng* của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu là $\vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}]$.

- Để thuận tiện trong cách viết, ta quy ước: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, với a, b, c, d là các số thực.

  Khi đó, với hai vectơ $\vec{u} = (x_1 ; y_1 ; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2 ; y_2 ; z_2)$, ta có:

  $$[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) = (y_1z_2 - y_2z_1 ; z_1x_2 - z_2x_1 ; x_1y_2 - x_2y_1).$$

- Hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ không cùng phương khi và chỉ khi vectơ $\vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}] \neq 0$.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Tìm toạ độ của một vectơ

Ví dụ 1 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-1 ; 2 ; 3)$, $\vec{b} = (3 ; 1 ; -2)$, $\vec{c} = (4 ; 2 ; -3)$.

a) Tìm toạ độ vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$.

b) Tìm toạ độ vectơ $\vec{v}$ sao cho $\vec{v} + 2\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$.

Giải

a) Ta có $2\vec{a} = (-2 ; 4 ; 6)$ và $\vec{b} = (3 ; 1 ; -2)$. Do đó,

$2\vec{a} + \vec{b} = (-2 + 3 ; 4 + 1 ; 6 + (-2))$ hay $2\vec{a} + \vec{b} = (1 ; 5 ; 4)$. Ngoài ra, vì $3\vec{c} = (12 ; 6 ; -9)$ nên $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c} = (-11 ; -1 ; 13)$.

b) Ta có $2\vec{b} = (6 ; 2 ; -4)$. Gọi $\vec{v} = (x ; y ; z)$, khi đó $\vec{v} + 2\vec{b} = (x + 6 ; y + 2 ; z - 4)$, $\vec{a} + \vec{c} = (-1 + 4 ; 2 + 2 ; 3 - 3)$ hay $\vec{a} + \vec{c} = (3 ; 4 ; 0)$. Do đó, $\vec{v} + 2\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x + 6 = 3 \\ y + 2 = 4 \\ z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \\ z = 4. \end{cases}$$

Vậy toạ độ của $\vec{v} = (-3 ; 2 ; 4)$.

Ví dụ 2 Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho $\vec{a} = (2 ; -2 ; 1)$, $\vec{b} = (2 ; 1 ; 3)$. Hãy chỉ ra toạ độ của một vectơ $\vec{c}$ khác vectơ $\vec{0}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Giải

Ta có $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = (-7 ; -4 ; 6)$. Mà $\vec{a} \,.\, \vec{c} = 0$ và $\vec{b} \,.\, \vec{c} = 0$. Nên khi đó vectơ $\vec{c}$ vuông góc với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ví dụ 3 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(1 ; 0 ; 1)$, $B(2 ; 1 ; 2)$, $D(1 ; -1 ; 1)$, $C'(4 ; 5 ; -5)$. Hãy chỉ ra toạ độ của một vectơ vuông góc với cả hai vectơ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'D'}$;

b) $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{BD}$.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1 ; 1 ; 1)$. Gọi toạ độ của điểm C là $(x_C ; y_C ; z_C)$, ta có: $\overrightarrow{DC} = (x_C - 1 ; y_C + 1 ; z_C - 1)$. Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Suy ra: $\begin{cases} x_C - 1 = 1 \\ y_C + 1 = 1 \\ z_C - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 0 \\ z_C = 2. \end{cases}$

Vậy toạ độ của điểm $C(2 ; 0 ; 2)$.

Tương tự, ta có: $D'(3 ; 4 ; -6)$, $B'(4 ; 6 ; -5)$.

$\overrightarrow{AC} = (1 ; 0 ; 1)$ và $\overrightarrow{B'D'} = (-1 ; -2 ; -1)$. Khi đó, $\vec{u} = [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{B'D'}] = (2 ; 0 ; -2)$.

Vậy $\vec{u} = (2 ; 0 ; -2)$ cùng vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'D'}$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AC'} = (3 ; 5 ; -6)$, $\overrightarrow{BD} = (-1 ; -2 ; -1)$.

Khi đó, $\vec{v} = [\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{BD}] = (-17 ; 9 ; -1)$. Vậy vectơ $\vec{v} = (-17 ; 9 ; -1)$ cùng vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{BD}$.

Vấn đề 2. Tìm toạ độ của điểm

Ví dụ 4 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $M(-2 ; 3 ; 1)$, $N(4 ; 0 ; 3)$. Tìm toạ độ của điểm P để N là trung điểm của đoạn thẳng MP.

Giải

Gọi toạ độ của điểm P là $(x_P ; y_P ; z_P)$. Vì N là trung điểm của đoạn thẳng MP nên ta có:

$$\begin{cases} x_N = \dfrac{x_M + x_P}{2} \\ y_N = \dfrac{y_M + y_P}{2} \\ z_N = \dfrac{z_M + z_P}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = 2x_N - x_M \\ y_P = 2y_N - y_M \\ z_P = 2z_N - z_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = 10 \\ y_P = -3 \\ z_P = 5. \end{cases}$$

Vậy toạ độ của điểm $P(10 ; -3 ; 5)$.

Ví dụ 5 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1 ; 0 ; 1)$, $B(2 ; 1 ; 2)$ và trọng tâm $G(1 ; -1 ; 1)$. Tìm toạ độ của đỉnh C.

Giải

Gọi toạ độ của điểm C là $(x_C ; y_C ; z_C)$. Vì G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B \\ z_C = 3z_G - z_A - z_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 0 \\ y_C = -4 \\ z_C = 0. \end{cases}$$

Vậy toạ độ của điểm $C(0 ; -4 ; 0)$.

Vấn đề 3. Tích vô hướng và các ứng dụng của tích vô hướng

Ví dụ 6 Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho $\vec{a} = (3 ; 2 ; -1)$, $\vec{b} = (-2 ; 1 ; 2)$. Tính côsin của góc $(\vec{a}, \vec{b})$.

Giải

Côsin của góc $(\vec{a}, \vec{b})$ là:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} . \vec{b}}{|\vec{a}| . |\vec{b}|} = \frac{3 . (-2) + 2 . 1 + (-1) . 2}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} . \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{-2}{\sqrt{14}}.$$

Ví dụ 7 Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho $A(-2 ; 3 ; 0)$, $B(4 ; 0 ; 5)$, $C(0 ; 2 ; -3)$.

a) Chứng minh rằng ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Tính chu vi tam giác ABC.

c) Tính số đo góc BAC.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (6 ; -3 ; 5)$, $\overrightarrow{AC} = (2 ; -1 ; -3)$, $k\overrightarrow{AC} = (2k ; -k ; -3k)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \neq k\overrightarrow{AC}$ với mọi $k \in \mathbb{R}$. Vậy ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Ta có:

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{70};$$

$$AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14};$$

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(0-4)^2 + (2-0)^2 + (-3-5)^2} = 2\sqrt{21}.$$

Do đó, chu vi tam giác ABC là: $\sqrt{70} + \sqrt{14} + 2\sqrt{21}$.

c) Trong tam giác ABC, ta có:

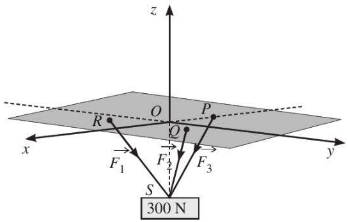
$$\cos\widehat{BAC} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| . |\overrightarrow{AC}|}$$

$$= \frac{6 . 2 + (-3) . (-1) + 5 . (-3)}{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + 5^2} . \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2}} = 0.$$

Vậy số đo của $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

Vấn đề 4. Ứng dụng

Ví dụ 8 Một vật có trọng lượng 300 N được treo bằng ba sợi dây cáp không dãn có chiều dài bằng nhau, mỗi dây cáp có một đầu được gắn tại một trong các điểm $P(-2 ; 0 ; 0)$, $Q(1 ; \sqrt{3} ; 0)$, $R(1 ; -\sqrt{3} ; 0)$ còn đầu kia gắn với vật tại điểm $S(0 ; 0 ; -2\sqrt{3})$ như *Hình 17* (trong đó mỗi đơn vị trên trục tương ứng với 1 N). Gọi $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ lần lượt là lực căng trên các sợi dây cáp RS, QS và PS.



Hình 17

Tìm toạ độ của các lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$.

Giải

Theo giả thiết, ta có các điểm $S(0 ; 0 ; -2\sqrt{3})$, $P(-2 ; 0 ; 0)$, $Q(1 ; \sqrt{3} ; 0)$, $R(1 ; -\sqrt{3} ; 0)$.

Khi đó: $\overrightarrow{SP} = (-2 ; 0 ; 2\sqrt{3})$, $\overrightarrow{SQ} = (1 ; \sqrt{3} ; 2\sqrt{3})$, $\overrightarrow{SR} = (1 ; -\sqrt{3} ; 2\sqrt{3})$.

Suy ra $|\overrightarrow{SP}| = |\overrightarrow{SQ}| = |\overrightarrow{SR}| = 4$. Lại có $\overrightarrow{PQ} = (3 ; \sqrt{3} ; 0)$, $\overrightarrow{QR} = (0 ; -2\sqrt{3} ; 0)$, $\overrightarrow{RP} = (-3 ; \sqrt{3} ; 0)$, vì $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{QR}| = |\overrightarrow{RP}| = 2\sqrt{3}$ nên tam giác PQR đều. Do đó, $|\overrightarrow{F_1}| = |\overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{F_3}|$.

Vì vậy, tồn tại hằng số $c \neq 0$ sao cho:

$$\overrightarrow{F_1} = c\overrightarrow{SR} = (c ; -\sqrt{3}c ; 2\sqrt{3}c),$$

$$\overrightarrow{F_2} = c\overrightarrow{SQ} = (c ; \sqrt{3}c ; 2\sqrt{3}c),$$

$$\overrightarrow{F_3} = c\overrightarrow{SP} = (-2c ; 0 ; 2\sqrt{3}c).$$

Suy ra $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = (0 ; 0 ; 6\sqrt{3}c)$.

Mặt khác, ta có: $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{F}$, trong đó $\overrightarrow{F} = (0 ; 0 ; -300)$ là trọng lực của vật.

Suy ra $6\sqrt{3}c = -300$, tức là $c = \dfrac{-50\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\overrightarrow{F_1} = \left(\dfrac{-50\sqrt{3}}{3} ; 50 ; -100\right)$,

$\overrightarrow{F_2} = \left(\dfrac{-50\sqrt{3}}{3}\ ;\ -50\ ;\ -100\right)$,

$\overrightarrow{F_3} = \left(\dfrac{100\sqrt{3}}{3}\ ;\ 0\ ;\ -100\right)$.

C. BÀI TẬP

18. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho $\vec{a} = (1\ ;-3\ ;-2)$, $\vec{b} = (4\ ;-1\ ;2)$. Toạ độ của vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ là:

A. $(3\ ;2\ ;4)$. **B.** $(5\ ;-4\ ;0)$.
C. $(-3\ ;-2\ ;-4)$. **D.** $(-3\ ;-2\ ;0)$.

19. Cho hai điểm $A(2\ ;2\ ;-1)$ và $B(4\ ;6\ ;-3)$. Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là:

A. $(3\ ;4\ ;-2)$. **B.** $(6\ ;8\ ;-4)$.
C. $(1\ ;2\ ;-1)$. **D.** $(-1\ ;-2\ ;1)$.

20. Cho tam giác ABC có $A(1\ ;3\ ;2)$, $B(2\ ;-1\ ;1)$ và $C(3\ ;1\ ;0)$. Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là:

A. $(6\ ;3\ ;3)$. **B.** $(2\ ;1\ ;1)$.
C. $\left(3\ ;\dfrac{3}{2}\ ;\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(2\ ;\dfrac{5}{3}\ ;1\right)$.

21. Trong không gian *Oxyz*, cho $\vec{u} = (2\ ;-1\ ;4)$. Độ dài của vectơ $\vec{u}$ bằng:

A. $\sqrt{5}$. **B.** 5. **C.** 27. **D.** $\sqrt{21}$.

22. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho điểm $A(-2\ ;-1\ ;4)$ và $B(1\ ;-3\ ;-1)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng:

A. $\sqrt{26}$. **B.** $\sqrt{22}$. **C.** $\sqrt{38}$. **D.** $\sqrt{34}$.

23. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho $\vec{a} = (0\ ;2\ ;2)$ và $\vec{b} = (3\ ;-3\ ;0)$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng:

A. 60^o. **B.** 120^o. **C.** 150^o. **D.** 30^o.

24. *Trong mỗi ý a), b), c), d), chọn phương án đúng (**Đ**) hoặc sai (**S**).*

Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho $A(1\ ;2\ ;-1)$, $B(2\ ;-1\ ;3)$, $C(-4\ ;7\ ;5)$.

a) Toạ độ của $\overrightarrow{AB} = (1\ ;-3\ ;4)$, $\overrightarrow{AC} = (-5\ ;5\ ;6)$.	**Đ**	**S**
b) $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{1^2+(-3)^2+4^2} = \sqrt{26}$, $AC = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-5)^2+5^2+6^2} = \sqrt{86}$.	**Đ**	**S**
c) $\overrightarrow{AB}\ .\ \overrightarrow{AC} = 4$.	**Đ**	**S**
d) $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{11}{52}$.	**Đ**	**S**

25. Cho hai vectơ $\vec{u} = (3\ ;-2\ ;-5)$ và $\vec{v} = (1\ ;1;5)$. Hãy chỉ ra toạ độ của một vectơ $\vec{w}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

26. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $M(2\ ;2\ ;-2)$, $N(-3\ ;5\ ;1)$, $P(1\ ;-1\ ;-2)$.

a) Chứng minh rằng ba điểm M, N, P không thẳng hàng.

b) Tính chu vi tam giác MNP.

c) Tính $\cos\widehat{NMP}$.

27. Rađa của một trung tâm kiểm soát không lưu sân bay có phạm vi theo dõi 500 km. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí của trung tâm kiểm soát không lưu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời như *Hình 18*, trong đó đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét.

Hình 18

Hỏi rađa trung tâm kiểm soát không lưu có thể phát hiện được máy bay tại vị trí A có toạ độ $(-200\ ;400\ ;200)$ đối với hệ trục toạ độ trên không?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

Các bài toán dưới đây, nếu không có chú ý gì thêm thì ta hiểu xét trong không gian với hệ toạ độ Oxyz.

28. Cho điểm M thoả mãn $\overrightarrow{OM} = \vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$. Toạ độ của điểm M là:

A. $(2 ; -4 ; 1)$. **B.** $(1 ; -4 ; 2)$.
C. $(-4 ; 2 ; 1)$. **D.** $(-1 ; 4 ; -2)$.

29. Cho hai điểm $M(3 ; -2 ; 3)$ và $N(1 ; -4 ; 5)$. Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{MN}$ là:

A. $(-2 ; -2 ; 2)$. **B.** $(2 ; 2 ; -2)$.
C. $(-2 ; -6 ; 2)$. **D.** $(2 ; -6 ; -2)$.

30. Cho hai vectơ $\vec{u} = (3 ; 4 ; -5)$, $\vec{v} = (5 ; -7 ; 1)$. Toạ độ của vectơ $\vec{u} + \vec{v}$ là:

A. $(8 ; 11 ; -4)$. **B.** $(-2 ; 11 ; -6)$.
C. $(8 ; -3 ; -4)$. **D.** $(-8 ; 3 ; 4)$.

31. Cho hai vectơ $\vec{u} = (2 ; -2 ; 1)$, $\vec{v} = (5 ; -4 ; -1)$. Toạ độ của vectơ $\vec{u} - \vec{v}$ là:

A. $(-3 ; 2 ; 2)$. **B.** $(7 ; -6 ; 0)$.
C. $(3 ; -2 ; -2)$. **D.** $(-3 ; -6 ; 0)$.

32. Cho vectơ $\vec{u} = (1 ; 2 ; -3)$. Toạ độ của vectơ $-3\vec{u}$ là:

A. $(3 ; 6 ; -9)$. **B.** $(-3 ; -6 ; -9)$.
C. $(3 ; 6 ; 9)$. **D.** $(-3 ; -6 ; 9)$.

33. Độ dài của vectơ $\vec{u} = (1 ; 2 ; 2)$ là:

A. 9. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

34. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u} = (-2 ; 1 ; 3)$ và $\vec{v} = (-3 ; 2 ; 5)$ là:

A. $\sqrt{14} . \sqrt{38}$. **B.** $-\sqrt{14} . \sqrt{38}$.
C. 23. **D.** -23.

35. Khoảng cách giữa hai điểm $I(2 ; -3 ; -4)$ và $K(7 ; -3 ; 8)$ là:

A. 169. **B.** 13. **C.** 26. **D.** 17.

36. Cho hai điểm $M(5 ; 2 ; -3)$ và $N(1 ; -4 ; 5)$. Trung điểm của đoạn thẳng MN có toạ độ là:

A. $(4 ; 6 ; -8)$. **B.** $(2 ; 3 ; -4)$.
C. $(6 ; -2 ; 2)$. **D.** $(3 ; -1 ; 1)$.

37. Cho tam giác MNP có $M(1 ; -2 ; 1)$, $N(-1 ; -2 ; 3)$ và $P(3 ; 1 ; 2)$. Trọng tâm của tam giác MNP có toạ độ là:

A. $(1 ; -1 ; 2)$ **B.** $(3 ; -3 ; 6)$.

C. $(-1 ; 1 ; -2)$. **D.** $(-3 ; 3 ; -6)$.

*Trong mỗi ý a), b), c), d) ở câu **38**, **39**, chọn phương án đúng (**Đ**) hoặc sai (**S**).*

38. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(2 ; -1 ; 3)$, $B(3 ; 0 ; 4)$, $D(2 ; -2 ; 3)$, $C'(5 ; 4 ; -3)$.

a) Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AD}$ là $(0 ; -1 ; 0)$.	**Đ**	**S**
b) Gọi toạ độ của điểm B' là $(x_{B'} ; y_{B'} ; z_{B'})$, ta có toạ độ của vectơ $\overrightarrow{B'C'}$ là $(5 - x_{B'} ; 4 - y_{B'} ; -3 - z_{B'})$.	**Đ**	**S**
c) Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AD}$.	**Đ**	**S**
d) Toạ độ của điểm B' là $(-5 ; -5 ; 3)$.	**Đ**	**S**

39. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $A(1 ; 0 ; 1)$, $B(2 ; 1 ; 2)$, $C(1 ; -1 ; 1)$.

a) Ba điểm A, B, C thẳng hàng.	**Đ**	**S**
b) Toạ độ điểm D thoả mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ là $D(0 ; 2 ; -1)$.	**Đ**	**S**
c) Độ dài BC bằng 2.	**Đ**	**S**
d) $\cos\widehat{BAC}$ bằng $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.	**Đ**	**S**

40. Cho hai vectơ $\vec{u} = (2 ; -2 ; -3)$ và $\vec{v} = (3 ; 3 ; 5)$. Hãy chỉ ra toạ độ của một vectơ $\vec{w}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

41. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính:

a) $\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{B'C'}$;

b) $\overrightarrow{D'A} \cdot \overrightarrow{BA'}$.

42. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $A(1 ; 0 ; 1)$, $B(2 ; 1 ; 2)$ và $C(0 ; -4 ; 0)$.

a) Chứng minh rằng ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

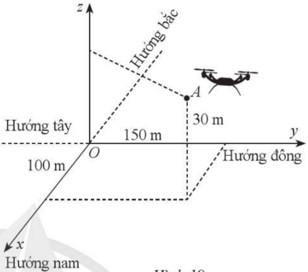
b) Tìm toạ độ của điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

c) Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

d) Tính chu vi của tam giác ABC.

e) Tính $\cos\widehat{BAC}$.

43. Một người điều khiển một flycam để phục vụ trong một chương trình của đài truyền hình. Đầu tiên flycam ở vị trí A cách vị trí điều khiển 100 m về phía nam và 150 m về phía đông, đồng thời cách mặt đất 30 m (*Hình 19*). Để thực hiện nhiệm vụ tiếp theo, người điều khiển flycam đến vị trí B cách vị trí điều khiển 80 m về phía bắc và 120 m về phía tây, đồng thời cách mặt đất 50 m.



Hình 19

Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc O là vị trí người điều khiển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox có hướng trùng với hướng nam, trục Oy có hướng trùng với hướng đông, trục Oz vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, mỗi đơn vị trên các trục tương ứng với 1 m.

a) Xác định toạ độ của flycam tại mỗi vị trí A, B đối với hệ toạ độ đã chọn.

b) Tính quãng đường flycam bay từ vị trí A đến vị trí B, biết flycam bay từ vị trí A đến vị trí B theo một đường thẳng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

§1 VECTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1. B. **2. A.** **3. A.** **4. D.** **5. C.** **6. B.**

7. Từ giả thiết, dễ thấy tam giác ABC vuông tại A và tam giác SAB đều. Do đó, $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=0$ và $(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{AB})=180^\circ-\widehat{SAB}=120^\circ$.

Ta có $\overrightarrow{SC}\,.\,\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AC}).\,\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{SA}\,.\,\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AB}$

$$=\overrightarrow{SA}\,.\,\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{SA}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|.\cos120^\circ=-\frac{a^2}{2}.$$

Suy ra $\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \dfrac{\overrightarrow{SC}.\,\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{SC}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{-\dfrac{a^2}{2}}{a^2} = -\dfrac{1}{2}.$

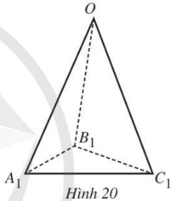
Đáp án: a) **Đ**, b) **Đ**, c) **S**, d) **S**.

8. Ta có, tứ giác *ABCD* là hình vuông có độ dài mỗi cạnh là a nên độ dài đường chéo AC là $a\sqrt{2}$. Tam giác *SAC* có $SA = SC = a$ và $AC = \sqrt{2}a$ nên tam giác *SAC* vuông cân tại *S*, suy ra $\widehat{SAC} = 45^\circ$. Do đó, $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AC}) = 180^\circ - \widehat{SAC} = 135^\circ$.

Suy ra $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{SA}\right| . \left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos 135^\circ = a.\sqrt{2}a.\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -a^2.$

Đáp án: a) **Đ**, b) **Đ**, c) **S**, d) **Đ**.

9*. a) Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{F_3}$ (*Hình 20*). Khi đó, hai vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OA_1}$ cùng phương, do đó tồn tại số $k \neq 0$ sao cho: $\overrightarrow{OA_1} = k.\overrightarrow{OA}$, tương tự, $\overrightarrow{OB_1} = k.\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC_1} = k.\overrightarrow{OC}$.



Hình 20

Suy ra, $F = \left|\overrightarrow{F_1}\right| = k.\left|\overrightarrow{OA}\right| = k.\,L.$ (1)

Do chiếc đèn ở vị trí cân bằng nên $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{P}.$ Gọi I là tâm của chiếc đèn hình tròn. Vì tam giác *ABC* là tam giác đều nên I cũng là trọng tâm của tam giác. Sử dụng quy tắc trọng tâm trong tam giác *ABC*, ta được:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OI} \Leftrightarrow \dfrac{1}{k}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}) = 3\overrightarrow{OI}$ hay $\overrightarrow{P} = 3k.\,\overrightarrow{OI}.$

Theo giả thiết bài toán, trọng lượng của chiếc đèn là 24 (N), do đó $OI = \dfrac{8}{k}.$

Mặt khác, xét hình chóp tam giác đều *O.ABC*, có *OI* vuông góc mới mặt phẳng đáy (*ABC*). Khi đó:

$OI = \sqrt{OA^2 - AI^2} = \sqrt{L^2 - 18^2} = \sqrt{L^2 - 324}.$

Suy ra, $\dfrac{8}{k} = \sqrt{L^2 - 324}$ hay $k = \dfrac{8}{\sqrt{L^2 - 324}}$. Thay $k = \dfrac{8}{\sqrt{L^2 - 324}}$ vào (1), ta được công thức tính hàm số: $F = \dfrac{8L}{\sqrt{L^2 - 324}}$ (N).

b) Khảo sát hàm số $F = \dfrac{8L}{\sqrt{L^2 - 324}}, (L > 18).$

$\lim\limits_{L \to 18^+} F = +\infty$, do đó đường thẳng $L = 18$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

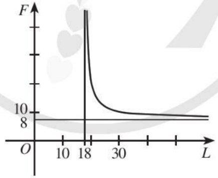
$\lim\limits_{L \to +\infty} F = 8$, do đó đường thẳng $F = 8$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có, $F' = \dfrac{-2\,592}{(L^2 - 324).\sqrt{L^2 - 324}} < 0,\ \forall L > 18.$ Do đó, hàm số luôn nghịch biến trên khoảng $(18 ; +\infty)$.

Ta có bảng biến thiên:

L	18		$+\infty$
F'		$-$	
F	$+\infty$	$\searrow$	8

Đồ thị hàm số:



Hình 21

c) Khi lực căng của mỗi sợi dây bằng 10 N, ta có:

$\dfrac{8L}{\sqrt{L^2 - 324}} = 10 \Rightarrow 8L = 10\sqrt{L^2 - 324} \Leftrightarrow L = 30$ (thoả mãn điều kiện $L > 18$).

Dựa vào đồ thị hàm số ở *Hình 21*, ta thấy chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây để lực căng tối đa là 10 N là 30 inch.

§2 TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ

10. A. **11. B.** **12. D.** **13. C.** **14. A.**

15. Ta có: $\overrightarrow{A'D'} = (1-1\ ;\ -1-0\ ;\ 1-1) = (0\ ;\ -1\ ;\ 0)$.

Gọi toạ độ của điểm B là $(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$, ta có: $\overrightarrow{BC} = (4-x_B\ ;\ 5-y_B\ ;\ -5-z_B)$.

Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'D'}$.

Suy ra: $\begin{cases} 4-x_B = 0 \\ 5-y_B = -1 \\ -5-z_B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 4 \\ y_B = 6 \\ z_B = -5. \end{cases}$

Vậy toạ độ của điểm $B(4\ ;\ 6\ ;\ -5)$.

Đáp án: a) **Đ**, b) **S**, c) **Đ**, d) **S**.

16. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (5-1\ ;\ 0-2\ ;\ -1-3) = (4\ ;\ -2\ ;\ -4)$.

Gọi toạ độ của điểm D là $(x_D\ ;\ y_D\ ;\ z_D)$, ta có: $\overrightarrow{CD} = (x_D-4\ ;\ y_D-3\ ;\ z_D-6)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x_D = 4 \\ 3-y_D = -2 \\ 6-z_D = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = 5 \\ z_D = 10. \end{cases}$

Vậy toạ độ của điểm $D(0\ ;\ 5\ ;\ 10)$.

Đáp án: a) **Đ**, b) **Đ**, c) **S**, d) **S**.

17. Từ giả thiết ta có toạ độ của điểm A là $A(300\ ;\ 200\ ;\ 100)$, toạ độ của điểm B là $B(1\ 200\ ;\ 2\ 100\ ;\ 250)$. Do đó, ta có:

$\overrightarrow{AB} = (1\ 200-300\ ;\ 2\ 100-200\ ;\ 250-100)$ hay $\overrightarrow{AB} = (900\ ;\ 1\ 900\ ;\ 150)$.

§3 BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

18. C. **19. A.** **20. B.** **21. D.** **22. C.** **23. B.**

24. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2-1\ ;\ -1-2\ ;\ 3-(-1)) = (1\ ;\ -3\ ;\ 4)$,

$\overrightarrow{AC} = (-4-1\ ;\ 7-2\ ;\ 5-(-1)) = (-5\ ;\ 5\ ;\ 6)$.

$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{26},\ AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-5)^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{86}.$

$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = 1 . (-5) + (-3) . 5 + 4 . 6 = 4.$

$$\cos\widehat{BAC} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| . |\overrightarrow{AC}|} = \frac{4}{\sqrt{26} . \sqrt{86}} = \frac{2}{\sqrt{559}}.$$

Đáp án: a) **Đ**, b) **Đ**, c) **Đ**, d) **S**.

25. Ta có $\vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}] = (-5 ; -20 ; 5)$.

Khi đó, vectơ $\vec{w} = (-5 ; -20 ; 5)$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

26. a) Ta có: $\overrightarrow{MN} = (-5 ; 3 ; 3)$, $\overrightarrow{MP} = (-1 ; -3 ; 0)$, $k\overrightarrow{MP} = (-k ; -3k ; 0)$.

Suy ra $\overrightarrow{MN} \neq k\overrightarrow{MP}$ với mọi $k \in \mathbb{R}$. Vậy ba điểm M, N, P không thẳng hàng.

b) Ta có:

$MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{43};$

$MP = |\overrightarrow{MP}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{10};$

$NP = |\overrightarrow{NP}| = \sqrt{(1-(-3))^2 + (-1-5)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{61}.$

Do đó, chu vi tam giác MNP là: $\sqrt{43} + \sqrt{10} + \sqrt{61}$.

c) Trong tam giác MNP, ta có:

$$\cos\widehat{NMP} = \cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) = \frac{\overrightarrow{MN} . \overrightarrow{MP}}{|\overrightarrow{MN}| . |\overrightarrow{MP}|} = \frac{(-5).(-1) + 3.(-3) + 3.0}{\sqrt{43} . \sqrt{10}} = -\frac{4}{\sqrt{430}}.$$

27. Khoảng cách từ trung tâm kiểm soát không lưu tới máy bay tại vị trí A bằng độ dài OA:

$$OA = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{(-200)^2 + 400^2 + 200^2} = 200\sqrt{6} < 500.$$

Vì vậy rađa trung tâm kiểm soát không lưu có thể phát hiện được máy bay tại vị trí A có toạ độ $(-200 ; 400 ; 200)$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

28. B.	**29. A.**	**30. C.**	**31. A.**	**32. D.**
33. B.	**34. C.**	**35. B.**	**36. D.**	**37. A.**

38. Ta có: $\overrightarrow{AD} = (2-2\,;-2-(-1)\,;3-3)=(0\,;-1\,;0)$.

Gọi toạ độ của điểm B' là $(x_{B'}\,;y_{B'}\,;z_{B'})$, ta có: $\overrightarrow{B'C'}=(5-x_{B'}\,;4-y_{B'}\,;-3-z_{B'})$.

Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{AD}$.

Suy ra: $\begin{cases}5-x_{B'}=0\\4-y_{B'}=-1\\-3-z_{B'}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{B'}=5\\y_{B'}=5\\z_{B'}=-3.\end{cases}$

Vậy toạ độ của điểm $B'(5\,;5\,;-3)$.

Đáp án: a) **Đ**, b) **Đ**, c) **Đ**, d) **S**.

39. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1\,;1\,;1)$, $\overrightarrow{AC}=(0\,;-1\,;0)$, $k\overrightarrow{AC}=(0\,;-k\,;0)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}\neq k\overrightarrow{AC}$ với mọi $k\in\mathbb{R}$. Vậy ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Gọi toạ độ của điểm D là $(x_D\,;y_D\,;z_D)$, ta có: $\overrightarrow{DC}=(1-x_D\,;-1-y_D\,;1-z_D)$.

Vì toạ độ của điểm D thoả mãn $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}1-x_D=1\\-1-y_D=1\\1-z_D=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=0\\y_D=-2\\z_D=0.\end{cases}$

Nên toạ độ của điểm $D(0\,;-2\,;0)$.

$\overrightarrow{BC}=(-1\,;-2\,;-1)$. Suy ra $BC=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$.

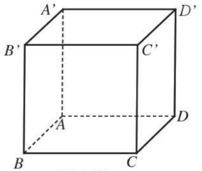
$$\cos\widehat{BAC}=\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{1\,.\,0+1\,.(-1)+1\,.\,0}{\sqrt{3}\,.\,1}=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Đáp án: a) **S**, b) **S**, c) **S**, d) **Đ**.

40. Ta có $\vec{w}=[\vec{u},\vec{v}]=(-1\,;-19\,;12)$.

Khi đó, vectơ $\vec{w}=(-1\,;-19\,;12)$ vuông góc với hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

41. (*Hình 22*)



Hình 22

a) Ta có: $B'C' \perp (ABB'A')$, suy ra $B'C' \perp A'B$. Vậy $\overrightarrow{A'B} . \overrightarrow{B'C'} = 0$.

b) Sử dụng định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ trong không gian, ta có:

$$\overrightarrow{D'A} . \overrightarrow{BA'} = \left|\overrightarrow{D'A}\right| . \left|\overrightarrow{BA'}\right| . \cos(\overrightarrow{D'A}, \overrightarrow{BA'})$$

$$= a\sqrt{2} . a\sqrt{2} . \cos(\overrightarrow{D'A}, \overrightarrow{CD'})$$

$$= 2a^2 . \cos 120^\circ = -a^2.$$

42. a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1 ; 1 ; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1 ; -4 ; -1)$, $k\overrightarrow{AC} = (-k ; -4k ; -k)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \neq k\overrightarrow{AC}$ với mọi $k \in \mathbb{R}$. Vậy ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Gọi toạ độ của điểm D là $(x_D ; y_D ; z_D)$, ta có: $\overrightarrow{DC} = (-x_D ; -4 - y_D ; -z_D)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_D = 1 \\ -4 - y_D = 1 \\ -z_D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -1 \\ y_D = -5 \\ z_D = -1. \end{cases}$$

Vậy toạ độ của điểm $D(-1 ; -5 ; -1)$.

c) Gọi toạ độ của điểm G là $(x_G ; y_G ; z_G)$, vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{1+2+0}{3} = 1 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{0+1-4}{3} = -1 \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = \dfrac{1+2+0}{3} = 1. \end{cases}$$

Vậy toạ độ của điểm $G(1 ; -1 ; 1)$.

d) Ta có: $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$;

$$AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2};$$

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(0-2)^2 + (-4-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{33}.$$

Do đó, chu vi tam giác ABC là: $\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{33}$.

e) Trong tam giác ABC, ta có:

$$\cos\widehat{BAC} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-4) + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{6}{3\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

43. a) Toạ độ của flycam tại vị trí A là $(100 ; 150 ; 30)$.

Toạ độ của flycam tại vị trí B là $(-80 ; -120 ; 50)$.

b) Quãng đường flycam bay từ vị trí A đến vị trí B bằng khoảng cách giữa hai điểm A và B

$$AB = \sqrt{(-80-100)^2 + (-120-150)^2 + (50-30)^2} = \sqrt{105\ 700} \approx 325 \text{ (m)}.$$

Chương III

CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

§1 KHOẢNG BIẾN THIÊN, KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khoảng biến thiên

Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi *Bảng 1*, trong đó $n_1 > 0$ và $n_m > 0$.

Gọi a_1, a_{m+1} lần lượt là đầu mút trái của nhóm 1, đầu mút phải của nhóm m.

Hiệu $R = a_{m+1} - a_1$ được gọi là *khoảng biến thiên* của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Nhóm	Tần số
$[a_1 ; a_2)$	n_1
$[a_2 ; a_3)$	n_2
...	...
$[a_m ; a_{m+1})$	n_m
	n

Bảng 1

Chú ý: Đối với mẫu số liệu ghép nhóm mà ta biết mẫu số liệu không ghép nhóm sinh ra nó thì ta cũng có thể chọn khoảng biến thiên của mẫu số liệu không ghép nhóm chính là khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm.

2. Khoảng tứ phân vị

Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi *Bảng 2*

Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
$[a_1 ; a_2)$	n_1	$cf_1 = n_1$
$[a_2 ; a_3)$	n_2	$cf_2 = n_1 + n_2$
...	...	...
$[a_m ; a_{m+1})$	n_m	$cf_m = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$
	n	

Bảng 2

• Giả sử nhóm thứ p là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{4}$, tức là $cf_{p-1} < \frac{n}{4}$ nhưng $cf_p \geq \frac{n}{4}$. Ta gọi s, h, n_p lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm p; cf_{p-1} là tần số tích luỹ của nhóm thứ $p - 1$. Tứ phân vị thứ nhất Q_1 được tính theo công thức sau:

$$Q_1 = s + \left(\frac{\frac{n}{4} - cf_{p-1}}{n_p} \right) . h .$$

• Giả sử nhóm thứ q là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{3n}{4}$, tức là $cf_{q-1} < \frac{3n}{4}$ nhưng $cf_q \geq \frac{3n}{4}$. Ta gọi t, l, n_q lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm q; cf_{q-1} là tần số tích luỹ của nhóm $q - 1$. Tứ phân vị thứ ba Q_3 được tính theo công thức sau:

$$Q_3 = t + \left(\frac{\frac{3n}{4} - cf_{q-1}}{n_q} \right) . l .$$

Ta gọi hiệu $\Delta Q = Q_3 - Q_1$ là *khoảng tứ phân vị* của mẫu số liệu đó.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Xác định khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm

Ví dụ 1 *Bảng 3* biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về số tiền (đơn vị: nghìn đồng) mà 50 khách hàng mua nước giải khát ở một cửa hàng trong một ngày.

Nhóm	Tần số
[15 ; 20)	4
[20 ; 25)	15
[25 ; 30)	19
[30 ; 35)	7
[35 ; 40)	5
	$n = 50$

Bảng 3

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó là:

A. 15. **B.** 5.

C. 35. **D.** 50.

Giải

Trong mẫu số liệu ghép nhóm đó, ta có: đầu mút trái của nhóm 1 là $a_1 = 15$, đầu mút phải của nhóm 5 là $a_6 = 40$.

Vậy khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó là:

$R = a_6 - a_1 = 40 - 15 = 35$ (nghìn đồng).

Chọn **C**.

Ví dụ 2 *Bảng 4* biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao (đơn vị: centimét) của 100 học sinh nữ khối 12. Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Nhóm	**Tần số**
[155 ; 160)	7
[160 ; 165)	43
[165 ; 170)	39
[170 ; 175)	11
	$n = 100$

Bảng 4

Giải

Trong mẫu số liệu ghép nhóm đó, ta có: đầu mút trái của nhóm 1 là $a_1 = 155$, đầu mút phải của nhóm 4 là $a_5 = 175$.

Vậy khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó là:

$R = a_5 - a_1 = 175 - 155 = 20$ (cm).

Ví dụ 3 Khi điều tra cân nặng của 115 học sinh nam khối 12, được kết quả từ 57 kg đến 82 kg. Nếu sử dụng mẫu số liệu ghép nhóm để biểu diễn cân nặng của 115 học sinh này thì khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là bao nhiêu?

Giải

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu không ghép nhóm là $82 - 57 = 25$ (kg).

Vì vậy khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm cũng là 25 (kg).

Vấn đề 2. Xác định khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Ví dụ 4 Một mẫu số liệu ghép nhóm có tứ phân vị là $Q_1 = 61$, $Q_2 = 68$, $Q_3 = 80$. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó là bao nhiêu?

Giải

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó là:

$\Delta Q = Q_3 - Q_1 = 80 - 61 = 19$.

Ví dụ 5 *Trong mỗi ý a), b), c), d), chọn phương án đúng (**Đ**) hoặc sai (**S**).*

Xét mẫu số liệu ghép nhóm trong *Ví dụ 1*, ta có bảng tần số, tần số tích luỹ như *Bảng 5*.

Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
[15 ; 20)	4	4
[20 ; 25)	15	19
[25 ; 30)	19	38
[30 ; 35)	7	45
[35 ; 40)	5	50
	$n = 50$	

Bảng 5

a) Nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{4}=\frac{50}{4}=12,5$.	**Đ**	**S**
b) $Q_1=\frac{137}{6}$ (nghìn đồng).	**Đ**	**S**
c) $Q_3 = 29$ (nghìn đồng).	**Đ**	**S**
d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là $\frac{401}{57}$ (nghìn đồng).	**Đ**	**S**

Giải

- Nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{4}=\frac{50}{4}=12,5$.

  Nhóm 2 có đầu mút trái $s = 20$, độ dài $h = 5$, tần số của nhóm $n_2 = 15$ và nhóm 1 có tần số tích luỹ $cf_1 = 4$. Ta có:

$$Q_1 = s+\left(\frac{12,5-cf_1}{n_2}\right).h = 20+\frac{12,5-4}{15}.5=\frac{137}{6} \text{ (nghìn đồng).}$$

- Nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{3n}{4}=\frac{3.50}{4}=37,5$.

  Nhóm 3 có đầu mút trái $t = 25$, độ dài $l = 5$, tần số của nhóm $n_3 = 19$ và nhóm 2 có tần số tích luỹ $cf_2 = 19$. Ta có:

$$Q_3 = t+\left(\frac{37,5-cf_2}{n_3}\right).l = 25+\frac{37,5-19}{19}.5=\frac{1\,135}{38} \text{ (nghìn đồng).}$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là:

$$\Delta Q = Q_3 - Q_1 = \frac{1\,135}{38}-\frac{137}{6}=\frac{401}{57}\approx 7,035 \text{ (nghìn đồng).}$$

Đáp án: a) **Đ**, b) **Đ**, c) **S**, d) **Đ**.

Ví dụ 6 Một trung tâm tiếng Anh tổ chức thi thử cho 120 học sinh đã đăng kí. Kết quả điểm của 120 học sinh là một mẫu số liệu có bảng tần số, tần số tích luỹ như *Bảng 6*. Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
[0 ; 1)	2	2
[1 ; 2)	4	6
[2 ; 3)	7	13
[3 ; 4)	7	20
[4 ; 5)	16	36
[5 ; 6)	28	64
[6 ; 7)	25	89
[7 ; 8)	20	109
[8 ; 9)	7	116
[9 ; 10]	4	120
	$n = 120$	

Bảng 6

Giải

• Nhóm 5 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{4} = \frac{120}{4} = 30$. Nhóm 5 có đầu mút trái $s = 4$, độ dài $h = 1$, tần số của nhóm $n_5 = 16$ và nhóm 4 có tần số tích luỹ $cf_4 = 20$. Ta có:

$$Q_1 = s + \left(\frac{30 - cf_4}{n_5}\right).\,h = 4 + \frac{30-20}{16}.\,1 = 4,625.$$

• Nhóm 8 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{3n}{4} = \frac{3.120}{4} = 90$. Nhóm 8 có đầu mút trái $t = 7$, độ dài $l = 1$, tần số của nhóm $n_8 = 20$ và nhóm 7 có tần số tích luỹ $cf_7 = 89$. Ta có:

$$Q_3 = t + \left(\frac{90 - cf_7}{n_8}\right).\,l = 7 + \frac{90-89}{20}.\,1 = 7,05.$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là:

$$\Delta Q = Q_3 - Q_1 = 7,05 - 4,625 = 2,425.$$

C. BÀI TẬP

1. Việc kiểm tra chỉ số đường huyết thường xuyên đóng vai trò vô cùng quan trọng để phòng và điều trị bệnh tiểu đường. Khi điều tra chỉ số đường huyết của 100 người cao tuổi ở một địa phương, được kết quả từ 5,0 đến 11,3. Nếu sử dụng mẫu số liệu ghép nhóm để biểu diễn chỉ số đường huyết của 100 người đó thì khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là bao nhiêu?

A. 5,0 **B.** 11,3. **C.** 6,3. **D.**100.

2. Nhịp tim của người cao tuổi luôn là vấn đề phải được quan tâm vì liên quan đến sức khoẻ. Khi điều tra nhịp tim của 100 người cao tuổi ở một địa phương, được kết quả từ 65 nhịp/phút đến 81 nhịp/phút. Nếu sử dụng mẫu số liệu ghép nhóm để biểu diễn nhịp tim của 100 người cao tuổi đó thì khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là bao nhiêu?

A. 81. **B.** 16. **C.** 65. **D.** 100.

3. Một mẫu số liệu ghép nhóm có tứ phân vị là $Q_1 = 4$, $Q_2 = 6$, $Q_3 = 9$. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó là bao nhiêu?

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 9.

4. Khi điều tra cân nặng của 50 bé trai 6 tuổi, người ta được kết quả ở *Bảng 7*. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là bao nhiêu?

A. 18. **B.** 26.

C. 2. **D.** 8.

Nhóm	Tần số
[18 ; 20)	6
[20 ; 22)	23
[22 ; 24)	12
[24 ; 26)	9
	$n = 50$

Bảng 7

5. Khi thống kê số khách hàng vào siêu thị trong 30 ngày đầu tiên khai trương, người ta được kết quả là bảng tần số ghép nhóm như *Bảng 8*. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó là bao nhiêu?

A. 120. **B.** 80.

C. 20. **D.** 200.

Nhóm	Tần số
[80 ; 100)	3
[100 ; 120)	5
[120 ; 140)	6
[140 ; 160)	8
[160 ; 180)	6
[180 ; 200)	2
	$n = 30$

Bảng 8

6. Khi điều tra độ tuổi của dân cư trong một khu phố (đơn vị: tuổi) được kết quả cho bởi *Bảng 9*.

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó là: $R = 90$ (tuổi).	Đ	S
b) Nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{4} = \frac{200}{4} = 50$.	Đ	S
c) $Q_3 = 52\frac{17}{24}$.	Đ	S
d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu lớn hơn 20.	Đ	S

Nhóm	Tần số
[10 ; 20)	18
[20 ; 30)	31
[30 ; 40)	40
[40 ; 50)	48
[50 ; 60)	50
[60 ; 70)	10
[70 ; 80)	2
[80 ; 90)	1
	$n = 200$

Bảng 9

7. Một cuộc khảo sát xác định số năm đã sử dụng của 160 chiếc ô tô. Kết quả điều tra được cho trong *Bảng 10*.

a) Tính khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

b) Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
[0 ; 4)	4	4
[4 ; 8)	23	27
[8 ; 12)	37	64
[12 ; 16)	57	121
[16 ; 20)	39	160
	$n = 160$	

Bảng 10

8. Một thư viện thống kê số người đến đọc sách vào buổi tối trong 30 ngày của một tháng và kết quả được cho bởi *Bảng 11*.

a) Tính khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

b) Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
[50 ; 55)	4	4
[55 ; 60)	5	9
[60 ; 65)	7	16
[65 ; 70)	8	24
[70 ; 75)	3	27
[75 ; 80)	2	29
[85 ; 90)	1	30
	$n = 30$	

Bảng 11

§2 PHƯƠNG SAI, ĐỘ LỆCH CHUẨN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi *Bảng 12*.

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[a_1 ; a_2)$	x_1	n_1
$[a_2 ; a_3)$	x_2	n_2
…	…	…
$[a_m ; a_{m+1})$	x_m	n_m
		$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$

Bảng 12

• Gọi $\overline{x}$ là số trung bình cộng của mẫu số liệu đó. Số

$$s^2 = \frac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + ... + n_m(x_m - \overline{x})^2}{n}$$

được gọi là *phương sai* của mẫu số liệu đó.

• Căn bậc hai (số học) của phương sai gọi là độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là s, nghĩa là $s = \sqrt{s^2}$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Một siêu thị thống kê số tiền (đơn vị: chục nghìn đồng) mà 44 khách hàng mua hàng ở siêu thị đó trong một ngày. Số liệu được cho ở *Bảng 13*.

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[40 ; 45)	42,5	4
[45 ; 50)	47,5	14
[50 ; 55)	52,5	8
[55 ; 60)	57,5	10
[60 ; 65)	62,5	6
[65 ; 70)	67,5	2
		$n = 44$

Bảng 13

a) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) là:

A. 53,2. **B.** 46,1. **C.** 30. **D.** 11.

b) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) là:

A. 6,8. **B.** 7,3 **C.** 3,3. **D.** 46,1.

Giải

a) Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$\overline{x} = \frac{4.42,5 + 14.47,5 + 8.52,5 + 10.57,5 + 6.62,5 + 2.67,5}{44}$$

$$= \frac{585}{11} \approx 53,18 \text{ (chục nghìn đồng).}$$

Ta có: $4.(42,5 - 53,18)^2 + 14.(47,5 - 53,18)^2 + 8.(52,5 - 53,18)^2 +$

$+ 10.(57,5 - 53,18)^2 + 6.(62,5 - 53,18)^2 + 2.(67,5 - 53,18)^2 = 2029,5456.$

Vậy phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên là:

$$s^2 = \frac{2029,5456}{44} \approx 46,1.$$

Chọn **B**.

b) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên là:

$$s \approx \sqrt{46,1} \approx 6,8 \text{ (chục nghìn đồng).}$$

Chọn **A**.

Ví dụ 2 *Trong mỗi ý a), b), c), d), chọn phương án đúng (**Đ**) hoặc sai (**S**).*

Bảng 14 và *Bảng 15* lần lượt biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm thống kê mức lương của hai công ty A, B (đơn vị: triệu đồng).

Nhóm	**Giá trị đại diện**	**Tần số**
[10 ; 15)	12,5	15
[15 ; 20)	17,5	18
[20 ; 25)	22,5	10
[25 ; 30)	27,5	10
[30 ; 35)	32,5	5
[35 ; 40)	37,5	2
		$n = 60$

Bảng 14

Nhóm	**Giá trị đại diện**	**Tần số**
[10 ; 15)	12,5	25
[15 ; 20)	17,5	15
[20 ; 25)	22,5	7
[25 ; 30)	27,5	5
[30 ; 35)	32,5	5
[35 ; 40)	37,5	3
		$n = 60$

Bảng 15

a) Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm ở *Bảng 14* là $\frac{62}{3}$ (triệu đồng).	**Đ**	**S**
b) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm ở *Bảng 14* là: $s_1^2 \approx 49,1389$	**Đ**	**S**
c) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm ở *Bảng 15* là: $s_2 \approx 7,61$ (triệu đồng).	**Đ**	**S**
d) Công ty B có mức lương đồng đều hơn công ty A	**Đ**	**S**

Giải

• Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm ở *Bảng 14* là:

$$\overline{x}_1 = \frac{15.12,5+18.17,5+10.22,5+10.27,5+5.32,5+2.37,5}{60}$$

$$= \frac{62}{3} \approx 20,67 \text{ (triệu đồng).}$$

Ta có: $15.(12,5-20,67)^2 + 18.(17,5-20,67)^2 + 10.(22,5-20,67)^2 +$

$+10.(27,5-20,67)^2 + 5.(32,5-20,67)^2 + 2.(37,5-20,67)^2 \approx 2\,948,334.$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm ở *Bảng 14* là: $s_1^2 = \dfrac{2\,948,334}{60} \approx 49,1389.$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm ở *Bảng 14* là:

$s_1 \approx \sqrt{49,1389} \approx 7$ (triệu đồng).

- Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm ở *Bảng 15* là:

$$\overline{x}_2 = \frac{25.\,12,5+15.\,17,5+7\,.22,5+5.27,5+5.32,5+3.37,5}{60}$$

$$= \frac{1\,145}{60} \approx 19,08 \text{ (triệu đồng).}$$

Ta có: $25.\,(12,5-19,08)^2 + 15.\,(17,5-19,08)^2 + 7.\,(22,5-19,08)^2 +$

$+5.\,(27,5-19,08)^2 + 5.\,(32,5-19,08)^2 + 3.\,(37,5-19,08)^2 \approx 3\,474,584.$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm ở *Bảng 15* là: $s_2^2 = \dfrac{3\,474,584}{60} \approx 57,9097.$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm ở *Bảng 15* là:

$s_2 \approx \sqrt{57,9097} \approx 7,61$ (triệu đồng).

- Vì $s_1 \approx 7 < s_2 \approx 7,61$ nên công ty A có mức lương đồng đều hơn công ty B.

Đáp án: a) **Đ**, b) **Đ**, c) **Đ**, d) **S**.

Ví dụ 3 *Bảng 16* biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về độ tuổi của cư dân trong một khu phố. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm đó (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Nhóm	**Giá trị đại diện**	**Tần số**
[20 ; 30)	25	25
[30 ; 40)	35	20
[40 ; 50)	45	20
[50 ; 60)	55	15
[60 ; 70)	65	14
[70 ; 80)	75	6
		$n = 100$

Bảng 16

Giải

Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm ở *Bảng 16* là:

$$\overline{x}_1 = \frac{25.25+20.35+20.45+15.55+14.65+6.75}{100}$$

$$= \frac{4410}{100} = 44,1.$$

Ta có: $25\,.\,(25-44,1)^2 + 20\,.\,(35-44,1)^2 + 20\,.\,(45-44,1)^2 + 15\,.\,(55-44,1)^2 +$

$+ 14\,.\,(65-44,1)^2 + 6\,.\,(75-44,1)^2 \approx 24\,419.$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên là: $s^2 = \dfrac{24\,419}{100} = 244,19.$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên là:

$$s \approx \sqrt{244,19} \approx 15,63 \text{ (tuổi)}.$$

C. BÀI TẬP

9. Một mẫu số liệu ghép nhóm có độ lệch chuẩn bằng 9 thì có phương sai bằng bao nhiêu?

A. 9. **B.** 3. **C.** 18. **D.** 81.

10. Một mẫu số liệu ghép nhóm có phương sai bằng 16 thì có độ lệch chuẩn bằng bao nhiêu?

A. 4. **B.** 8. **C.** 256. **D.** 32.

11. *Trong mỗi ý a), b), c), d), chọn phương án đúng (**Đ**) hoặc sai (**S**).*

Một trung tâm ngoại ngữ thực hiện kiểm tra đầu vào của 80 học sinh đăng kí học, kết quả kiểm tra được cho bởi bảng tần số ghép nhóm như *Bảng 17*.

a) Tổng số học sinh là 800.	**Đ**	**S**
b) Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm đó là: 5,7875.	**Đ**	**S**
c) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm đó là: $s^2 \approx 3,85$.	**Đ**	**S**
d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm đó là: $s = \sqrt{3,85} \approx 1,962$.	**Đ**	**S**

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[0 ; 1)	0,5	2
[1 ; 2)	1,5	3
[2 ; 3)	2,5	3
[3 ; 4)	3,5	5
[4 ; 5)	4,5	8
[5 ; 6)	5,5	20
[6 ; 7)	6,5	16
[7 ; 8)	7,5	15
[8 ; 9)	8,5	6
[9 ; 10]	9,5	2
		$n = 80$

Bảng 17

12. *Bảng 18* thống kê mật độ dân số (đơn vị: người/km^2) của 23 tỉnh, thành phố thuộc vùng Trung du và miền núi phía Bắc, Đồng bằng sông Hồng (không kể thành phố Hà Nội và tỉnh Bắc Ninh) trong năm 2021 (*Nguồn: Niên giám Thống kê 2021, NXB Thống kê, 2022*).

Tỉnh, thành	Mật độ dân số (người/km^2)	Tỉnh, thành	Mật độ dân số (người/km^2)
Hà Giang	112	Sơn La	91
Cao Bằng	81	Hoà Bình	190
Bắc Kạn	67	Vĩnh Phúc	964

Tuyên Quang	137		Quảng Ninh	218
Lào Cai	120		Hải Phòng	1 358
Yên Bái	122		Hải Dương	1 161
Thái Nguyên	376		Hưng Yên	1 381
Lạng Sơn	96		Thái Bình	1 184
Bắc Giang	481		Hà Nam	1 015
Phú Thọ	427		Nam Định	1 100
Điện Biên	66		Ninh Bình	714
Lai Châu	53			

Bảng 18

a) Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu cho bởi *Bảng 18* theo bảy nhóm: [0 ; 200); [200 ; 400); [400 ; 600); [600 ; 800); [800 ; 1 000); [1 000 ; 1 200); [1 200 ; 1 400).

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

13. Khi thống kê chiều cao (đơn vị: centimét) của 120 học sinh nữ khối 12 ở một trường trung học phổ thông được kết quả từ 155 cm đến 175 cm. Nếu sử dụng mẫu số liệu ghép nhóm để biểu diễn kết quả này thì khoảng biến thiên của mẫu số liệu là:

A. 155. **B.** 175. **C.** 20. **D.** 165.

14. Một mẫu số liệu ghép nhóm có tứ phân vị thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là Q_1, Q_2, Q_3. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó bằng

A. $Q_2 - Q_1$. **B.** $Q_3 - Q_1$. **C.** $Q_3 - Q_2$. **D.** $Q_3 + Q_1 - Q_2$.

15. *Trong mỗi ý a), b), c), d), chọn phương án đúng (**Đ**) hoặc sai (**S**).*
Cho mẫu số liệu ghép nhóm như *Bảng 19*.

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là 2.	**Đ**	**S**
b) Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là 5,32.	**Đ**	**S**
c) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là 5,0176.	**Đ**	**S**
d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là 2,24.	**Đ**	**S**

Nhóm	**Giá trị đại diện**	**Tần số**
[0 ; 2)	1	2
[2 ; 4)	3	5
[4 ; 6)	5	8
[6 ; 8)	7	7
[8 ; 10)	9	3
		$n = 25$

Bảng 19

16. *Bảng 20* và *Bảng 21* lần lượt biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về nhiệt độ không khí trung bình các tháng năm 2022 tại Bãi Cháy (Quảng Ninh) và Nam Định (đơn vị: độ C).

Bãi Cháy

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[14 ; 17)	15,5	1
[17 ; 20)	18,5	2
[20 ; 23)	21,5	1
[23 ; 26)	24,5	4
[26 ; 29)	27,5	2
[29 ; 32)	30,5	2
		$n = 12$

Bảng 20

Nam Định

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[14 ; 17)	15,5	1
[17 ; 20)	18,5	2
[20 ; 23)	21,5	1
[23 ; 26)	24,5	3
[26 ; 29)	27,5	2
[29 ; 32)	30,5	3
		$n = 12$

Bảng 21

(*Nguồn: Niên giám Thống kê 2022, NXB Thống kê, 2023*)

a) Tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm của Bãi Cháy và Nam Định.

b) Trong hai địa điểm Bãi Cháy và Nam Định, địa điểm nào có nhiệt độ không khí trung bình tháng đồng đều hơn?

17. *Bảng 22* thống kê độ ẩm không khí trung bình các tháng năm 2022 tại Đà Nẵng và Quy Nhơn (đơn vị: %).

Tháng / Độ ẩm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đà Nẵng	85	80	82	82	79	72	76	79	81	81	82	84
Quy Nhơn	83	81	81	80	77	77	75	72	77	78	85	80

(*Nguồn: Niên giám Thống kê 2022, NXB Thống kê, 2023*)

Bảng 22

a) Hãy lần lượt ghép các số liệu của Đà Nẵng, Quy Nhơn thành năm nhóm sau: [71 ; 74), [74 ; 77), [77 ; 80), [80 ; 83), [83 ; 86).

b) Tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm của Đà Nẵng và Quy Nhơn.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

§1 KHOẢNG BIẾN THIÊN, KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

1. C. **2. B.** **3. A.** **4. D.** **5. A.**

6. Ta có đầu mút trái của nhóm 1 là $a_1 = 10$, đầu mút phải của nhóm 8 là $a_9 = 90$. Vậy khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó là:

$R = a_9 - a_1 = 90 - 10 = 80$ (tuổi).

Trong *Bảng 23*.

Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
[10 ; 20)	18	18
[20 ; 30)	31	49
[30 ; 40)	40	89
[40 ; 50)	48	137
[50 ; 60)	50	187
[60 ; 70)	10	197
[70 ; 80)	2	199
[80 ; 90)	1	200
	$n = 200$	

Bảng 23

• Nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{4} = \frac{200}{4} = 50$.

Nhóm 3 có đầu mút trái $s = 30$, độ dài $h = 10$, tần số của nhóm $n_3 = 40$ và nhóm 2 có tần số tích luỹ $cf_2 = 49$. Ta có:

$$Q_1 = s + \left(\frac{50 - cf_2}{n_3}\right) . h = 30 + \frac{50-49}{40} . 10 = 30,25 \text{ (tuổi)}.$$

• Nhóm 5 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{3n}{4} = \frac{3 . 200}{4} = 150$.

Nhóm 5 có đầu mút trái $t = 50$, độ dài $l = 10$, tần số của nhóm $n_5 = 50$ và nhóm 4 có tần số tích luỹ $cf_4 = 137$. Ta có:

$$Q_3 = t + \left(\frac{150 - cf_4}{n_5}\right) . h = 50 + \left(\frac{150-137}{50}\right) . 10 = 52,6 \text{ (tuổi)}.$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là:

$\Delta Q = Q_3 - Q_1 = 52,6 - 30,25 = 22,35$ (tuổi).

Đáp án: a) **S**, b) **Đ**, c) **S**, d) **Đ**.

7. a) Ta có đầu mút trái của nhóm 1 là $a_1 = 0$, đầu mút phải của nhóm 5 là $a_6 = 20$. Vậy khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó là:

$R = a_6 - a_1 = 20 - 0 = 20$ (năm).

b) • Nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{4} = \frac{160}{4} = 40$.

Nhóm 3 có đầu mút trái $s = 8$, độ dài $h = 4$, tần số của nhóm $n_3 = 37$ và nhóm 2 có tần số tích luỹ $cf_2 = 27$. Ta có:

$$Q_1 = s + \left(\frac{40 - cf_2}{n_3}\right) . h = 8 + \frac{40 - 27}{37} . 4 = \frac{348}{37} \text{ (năm)}.$$

• Nhóm 4 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{3n}{4} = \frac{3 . 160}{4} = 120$.

Nhóm 4 có đầu mút trái $t = 12$, độ dài $l = 4$, tần số của nhóm $n_4 = 57$ và nhóm 3 có tần số tích luỹ $cf_3 = 64$. Ta có:

$$Q_3 = t + \left(\frac{120 - cf_3}{n_4}\right) . l = 12 + \frac{120 - 64}{57} . 4 = \frac{908}{57} \text{ (năm)}.$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là:

$$\Delta Q = Q_3 - Q_1 = \frac{908}{57} - \frac{348}{37} \approx 6,5 \text{ (năm)}.$$

8. a) Ta có đầu mút trái của nhóm 1 là $a_1 = 50$, đầu mút phải của nhóm 7 là $a_8 = 90$. Vậy khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó là:

$$R = a_8 - a_1 = 90 - 50 = 40 \text{ (người)}.$$

b) • Nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{4} = \frac{30}{4} = 7,5$.

Nhóm 2 có đầu mút trái $s = 55$, độ dài $h = 5$, tần số của nhóm $n_2 = 5$ và nhóm 1 có tần số tích luỹ $cf_1 = 4$. Ta có:

$$Q_1 = s + \left(\frac{7,5 - cf_1}{n_2}\right) . h = 55 + \frac{7,5 - 4}{5} . 5 = 58,5.$$

• Nhóm 4 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{3n}{4} = \frac{3 . 30}{4} = 22,5$.

Nhóm 4 có đầu mút trái $t = 65$, độ dài $l = 5$, tần số của nhóm $n_4 = 8$ và nhóm 3 có tần số tích luỹ $cf_3 = 16$. Ta có:

$$Q_3 = t + \left(\frac{22,5 - cf_3}{n_4}\right) . h = 65 + \frac{22,5 - 16}{8} . 5 = 69,0625$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là:

$$\Delta Q = Q_3 - Q_1 = 69,0625 - 58,5 \approx 11 \text{ (người)}.$$

§2 PHƯƠNG SAI, ĐỘ LỆCH CHUẨN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

9. D. **10. A.**

11. Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm ở *Bảng 17* là:

$$\overline{x}=\frac{2.0,5+3.1,5+3.2,5+5.3,5+8.4,5+20.5,5+16.6,5+15.7,5+6.8,5+2.9,5}{80}$$

$$=\frac{463}{80}=5,7875.$$

Vậy phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm đó là:

$$s^2=\frac{1}{80}[2.(0,5-5,7875)^2+3.(1,5-5,7875)^2+3.(2,5-5,7875)^2+$$

$$+5.(3,5-5,7875)^2+8.(4,5-5,7875)^2+20.(5,5-5,7875)^2+$$

$$+16.(6,5-5,7875)^2+15.(7,5-5,7875)^2+6.(8,5-5,7875)^2+$$

$$+2.(9,5-5,7875)^2]=\frac{24\,671}{6\,400}\approx 3,85.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm đó là: $s=\sqrt{3,85}\approx 1,962$.

Đáp án: a) **S**, b) **Đ**, c) **Đ**, d) **Đ**.

12. a) Bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu cho bởi *Bảng 24* theo bảy nhóm: [0 ; 200); [200 ; 400); [400 ; 600); [600 ; 800); [800 ; 1 000); [1 000 ; 1 200); [1 200 ; 1 400).

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[0 ; 200)	100	11
[200 ; 400)	300	2
[400 ; 600)	500	2
[600 ; 800)	700	1
[800 ; 1 000)	900	1
[1 000 ; 1 200)	1 100	4
[1 200 ; 1 400)	1 300	2
		$n = 23$

Bảng 24

b) Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm đó là:

$$\overline{x} = \frac{1}{23}(11 . 100 + 2 . 300 + 2 . 500 + 1 . 700 + 1 . 900 + 4 . 1\,100 + 2 . 1\,300)$$

$$= \frac{1\,1300}{23} \approx 491{,}3.$$

Vậy phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm đó là:

$$s^2 = \frac{1}{23}[11 . (100 - 491{,}3)^2 + 2 . (300 - 491{,}3)^2 + 2 . (500 - 491{,}3)^2 +$$

$$+ 1 . (700 - 491{,}3)^2 + 1 . (900 - 491{,}3)^2 + 4 . (1\,100 - 491{,}3)^2 +$$

$$+ 2 . (1\,300 - 491{,}3)^2] = \frac{4\,758\,260{,}87}{23} \approx 206\,880{,}9074.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm đó là:

$$s = \sqrt{206\,880{,}9074} \approx 455 \text{ (người/km}^2\text{)}.$$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

13. C. **14. B.**

15. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là: $10 - 0 = 10$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$\overline{x} = \frac{2.1 + 5.3 + 8.5 + 7.7 + 3.9}{25} = 5{,}32.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$s^2 = \frac{2.(1-5{,}32)^2 + 5.(3-5{,}32)^2 + 8.(5-5{,}32)^2 + 7.(7-5{,}32)^2 + 3.(9-5{,}32)^2}{25}$$

$$= \frac{3\,135}{625} = 5{,}0176.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là: $s = \sqrt{5{,}0176} = 2{,}24$.

Đáp án: a) **S**, b) **Đ**, c) **Đ**, d) **Đ**.

16. a)

	Bãi Cháy	**Nam Định**
Số trung bình	24	24,5
Phương sai	20,75	24
Độ lệch chuẩn	4,5552	4,8990
Khoảng biến thiên	18	18
Khoảng tứ phân vị	7,5	9

b) Do $4{,}5552 < 4{,}8990$ nên nhiệt độ ở Bãi Cháy đồng đều hơn.

17. a) Đà Nẵng

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[71 ; 74)	72,5	1
[74 ; 77)	75,5	1
[77 ; 80)	78,5	2
[80 ; 83)	81,5	6
[83 ; 86)	84,5	2
		$n = 12$

Quy Nhơn

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[71 ; 74)	72,5	1
[74 ; 77)	75,5	1
[77 ; 80)	78,5	4
[80 ; 83)	81,5	4
[83 ; 86)	84,5	2
		$n = 12$

b)

	Đà Nẵng	Quy Nhơn
Số trung bình	80,25	79,75
Phương sai	11,1875	11,1875
Độ lệch chuẩn	3,3448	3,3448
Khoảng biến thiên	15	15
Khoảng tứ phân vị	4	3

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
Địa chỉ: Tầng 6, toà nhà số 128 đường Xuân Thủy, quận Cầu Giấy, TP. Hà Nội
Điện thoại: 024.37547735
Email: nxb@hnue.edu.vn | Website: www.nxbdhsp.edu.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc – Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ CƯỜNG

Chịu trách nhiệm tổ chức bản thảo và bản quyền nội dung:
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM
Chủ tịch Hội đồng Quản trị: NGƯT NGÔ TRẦN ÁI
Tổng Giám đốc: VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập:
LÊ HUY ĐẠN – NGUYỄN THỊ QUÝ – ĐÀO ANH TIẾN

Thiết kế sách và trình bày bìa:
PHAN THỊ LƯƠNG

Minh hoạ:
PHAN THỊ LƯƠNG

Sửa bản in:
LÊ TRUNG DŨNG – VŨ MẠNH HUY

Trong sách có sử dụng tư liệu, hình ảnh của một số tác giả. Trân trọng cảm ơn.

Bài tập TOÁN 12 – TẬP MỘT

Mã số:

Mã ISBN:

In .... cuốn, khổ 17 x 24 cm, tại ....

Địa chỉ: ....

Số xác nhận đăng kí xuất bản: ....

Quyết định xuất bản số: ....

In xong và nộp lưu chiểu ....

Mang cuộc sống vào bài học
Đưa bài học vào cuộc sống

BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 12
Cánh Diều

I. MÔN HỌC VÀ HOẠT ĐỘNG GIÁO DỤC BẮT BUỘC	
1	Ngữ văn 12 (Tập một, Tập hai)
2	Toán 12 (Tập một, Tập hai)
3	Lịch sử 12
4	Tiếng Anh 12 Explore New Worlds
5	Giáo dục quốc phòng và an ninh 12
6	Giáo dục thể chất 12 - Bóng đá
	Giáo dục thể chất 12 - Bóng rổ
	Giáo dục thể chất 12 - Cầu lông
	Giáo dục thể chất 12 - Đá cầu
7	Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 12
II. MÔN HỌC LỰA CHỌN	
1	Địa lí 12
2	Giáo dục kinh tế và pháp luật 12
3	Vật lí 12
4	Hoá học 12
5	Sinh học 12
6	Công nghệ 12 - Lâm nghiệp, Thuỷ sản
	Công nghệ 12 - Công nghệ Điện, Điện tử
7	Tin học 12 - Khoa học máy tính
	Tin học 12 - Tin học ứng dụng
8	Âm nhạc 12
III. CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP LỰA CHỌN	
1	Chuyên đề học tập Ngữ văn 12
2	Chuyên đề học tập Toán 12
3	Chuyên đề học tập Lịch sử 12
4	Chuyên đề học tập Địa lí 12
5	Chuyên đề học tập Giáo dục kinh tế và pháp luật 12
6	Chuyên đề học tập Vật lí 12
7	Chuyên đề học tập Hoá học 12
8	Chuyên đề học tập Sinh học 12
9	Chuyên đề học tập Công nghệ 12 - Lâm nghiệp, Thuỷ sản
	Chuyên đề học tập Công nghệ 12 - Công nghệ Điện, Điện tử
10	Chuyên đề học tập Tin học 12 - Khoa học máy tính
	Chuyên đề học tập Tin học 12 - Tin học ứng dụng
11	Chuyên đề học tập Âm nhạc 12

TÌM ĐỌC: CÁC SÁCH BỔ TRỢ VÀ THAM KHẢO LỚP 12 (Cánh Diều) THEO TỪNG MÔN HỌC

SỬ DỤNG
TEM CHỐNG GIẢ

Quét mã QR hoặc dùng trình duyệt web để truy cập website bộ sách Cánh Diều: www.hoc10.com

ISBN: 978-604-486-425-9
9 786044 864259
Giá: 26.000đ

Bản in thử